أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتها

تأليف

أ.نادية اسماعيل البرقلي

أساسيات التفاضل والتكامل
وتطبيقاتهما

عنوان الكتاب: أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما
تأليف: أ. نادية إسماعيل البرقلي
رقم الإيداع: 2009/967
ردمك: ISBN: 978-9959-55-073-6

الطبعة الأولى
2010 مسيحي

منشورات
جامعة 7 أكتوبر
الإدارة العامة للمكتبات والمطبوعات والنشر
هاتف: 2627201 - 2627202 - 2627203 - 2620648
فاكس: 051/2627350
ص.ب: 2478 - مصراته - الجماهيرية العظمى
الموقع الإلكتروني: www.7ou.edu.ly
البريد الإلكتروني: info@7ou.edu.ly

تم تخصيص الرقم الدولي الموحد للكتاب من قبل:
الوكالة الليبية للترقيم الدولي الموحد للكتاب
دار الكتب الوطنية - بنغازي - ليبيا
هاتف: 9097074 - 9096379 - 9090509
بريد مصور: 9097073
البريد الإلكتروني: nat_lib_libya@hotmail.com

أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما

تأليف

أ . نادية إسماعيل البرقلي

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿ ليعلم أن قد أبلغوا رسالات ربهم وأحاط بما لديهم وأحصى كل شيء عددا ﴾

صدق الله العظيم

(سورة الجن: 28)

الإهداء

إلى روح أبي الطاهرة

إلى الشمعة التي تحترق لتنير لنا

الطريق أمي

المحتويات

المقدمة

يبحث هذا الكتاب في أسس التفاضل والتكامل التي تعد من أهم فروع علم الرياضيات العالمية المعاصرة.

ويستخدم التفاضل والتكامل مجموعة مصطلحات خاصة عند حل مسائلها المختلفة ولذلك كان لابد من استعراض تلك المصطلحات الرياضية قبل الغوص والإبحار في فصول التفاضل والتكامل.

يمدنا علم التفاضل والتكامل والذي يسميه البعض بعلم الحسبان بالوسائل اللازمة لحساب معدلات تغير الدوال بالنسبة إلى تغيرها المطلق فإذا عرفنا الزيادة في المتغير وما يقابلها من زيادة في الدالة وجعلنا زيادة المتغير قريبة من الصفر عندها تكون نسبة تغير الدالة إلى تغير المتغير $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ قريبة من قيمة تدعى المشتقة والتي ستعبر عن معدل تغير الدالة إلى تغيرها المطلق.

أيضاً يتعامل علم التفاضل والتكامل مع الكميات المتغيرة فمثلاً إذا فرضنا أن طائرة تطير بسرعة ثابتة عندها ستقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية ولكن هذا لا يحدث واقعياً لان الطائرة تطير بسرعة متغيرة ولابد من إيجاد طرق لحساب المسافات التي تقطعها في أزمنة مختلفة وهذا ما يقدمه التفاضل.

والتفاضل في اللغة العربية يعني الزيادة الصغيرة أو الفضل من الشيء أي البقية الباقية ولذلك أطلق العلماء العرب عليه أسم التفاضل على هذا العلم الذي يدرس التغيرات الصغيرة.

يمكن اعتبار الحساب التكاملي العمل المعاكس للحساب التفاضلي ففي التكامل نبدأ من الدالة المشتقة ونحاول الوصول إلى الدالة الأصلية وقد تبين أن للتكامل بأنواعه فوائد كبيرة عند حساب المساحات والحجوم.

لقد درس أجدادنا الأوائل هذا العلم وابتكروا فيه طرقاً وأفكارا ومن الجدير بالذكر هنا أن العالم العربي ثابت بن قرة هو الذي أوجد حجم جسم دوائري حول محوره في القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون و كانت هناك أعمال كثيرة لعلماء عرب

ومسلمين في هذا المجال نخص بالذكر منهم ابن الهيثم وعمر الخيام والبوزجاني وبهاء الدين ألعاملي .

تابع العلماء الغربيون ما مهد إليه العلماء العرب والمسلمون ويعد العالم اسحق نيوتن الذي عاش في القرن السابع عشر ميلادي مبتكر علم الحسبان الحديث حيث قدم العديد من الدوال والسلاسل وورد في كتاب "تاريخ الرياضيات" لمؤلفه سميث النص التالي:

"لا يمكن أن نحدد تماماً إلى من يرجع الفضل في تطوير هذا العلم في العصور الحديثة ولكن باستطاعتنا القول أن العالم "ستيفن "يمثل مكاناً مرموقاً وخاصة في موضوع إيجاد مراكز ثقل الأجسام".

وكذلك فإن الكثير من العلماء الكبار أضافوا وطوروا هذا العلم وأهمهم:

باروو، ديكارث، فيرما، هايفنس، ووالس، الياباني كواسيكي، ولابنتز ولا ننسى أعمال العالم الاسكتلندي جورج بول في القرن التاسع عشر والتي مهدت إلى ظهور علم الحاسوب.

تدرس أفكار حساب التفاضل والتكامل في المدارس الثانوية والمعاهد العليا والجامعات بعد أن يكون الطالب قد درس الجبر وحل المعادلات وهندسة المستويات وحساب المثلثات والهندسة التحليلية وأصبح لديه فكرة عن رسم الدوال.

في الواقع يحتاج الدارس للتفاضل والتكامل إلى أن يكون لديه فكرة مسبقة عن المجموعات والمجالات العددية وحل المعادلات والمتباينات موضحة على خط الأعداد والقيم المطلقة ولذلك قمنا بوضع فصل خاص من هذا الكتاب لمراجعة هذه المفاهيم وتذكرة الطالب بمجموعة من الأمثلة عما درسه سابقا فيها.

لذا فإن عملية التفاضل والتكامل ستتم على دول مختلفة وبالتالي لابد من تذكير الطالب بالعلاقات والدوال وإشكالها وطرق التعامل معها والعمليات عليها وطرق تركيبها ودراسة نطاق عملها ومداها (القيم التي تأخذها) ومتى تكون هذه الدوال محدودة ومتى تكون فردية أو زوجية كل ذلك فصلناه في الفصل الثاني من الكتاب وأوردنا عليه أمثلة مختلفة محلولة وشارحة للأفكار.

يقدم الفصل الثالث من هذا الكتاب دراسة شاملة لحساب نهايات الدوال والتعرف على الدوال المستمرة والمنقطعة في نطاق عملها.

بدأنا بدراسة المشتقات والتفاضل في الفصل الرابع من هذا الكتاب وبينا الطرق المختلفة لحساب المشتقات للدوال البسيطة والدوال المركبة (قاعدة السلسلة) والدوال الضمنية التي لا يمكن فصل متغيراتها و الدوال الآسية المعقدة و أوردنا عدداً كبيراً من التمارين المحلولة على جميع هذه الطرق .

قدمنا في الفصل الخامس تطبيقات للتفاضل والمشتقات التي تفيد في العلوم الرياضية والعلوم التطبيقية مثل حساب معادلات المماسات والمماسات العمودية (النواظم) ودراسة سلوك الدوال وتغيراتها والتعرف على قيمها المحلية الكبرى والصغرى ونقاطها الحرجة ورسم منحياتها .

يعرض الفصل السادس والأخير من هذا الكتاب مفهوم التكامل اللامحدود وطرق إيجاد الدوال الأصلية لمختلف الدوال، كما يقدم فكرة عن التكامل المحدود وتطبيقاتها في حساب المساحات والحجوم الدورانية ويقدم في ذات الوقت عدداً من الطرق لحساب التكاملات مثل التكامل بتغير المتحول أو بالتعويض والتكامل بالتجزئة والتكامل بتفريق الكسور.

لقد راعينا عند إعداد هذا الكتاب أن نقدم كل ما يحتاجه الطالب في المعاهد العليا و الجامعات من طرق لحساب المشتقات والتكاملات وقد دعمنا كل فصل من فصوله بالعديد من المسائل والتدريبات المحلولة وكان هدفنا وضع تدرج منطقي يراعي تذكرة الطالب بما دارسه سابقاً في المرحلة الثانوية وحاولنا تطوير الأفكار الرياضية بالتدريج لنخفف قدر المستطاع الصعوبات ونمكن الطالب من المادة العلمية .

إن اطلاع الطالب على حل المئات من التمارين المحلولة سيمكنه بدون شك من استيعاب المادة العلمية ويرفع ثقته بنفسه وتحصيله العلمي ويمكنه في النهاية من حل تمارين مماثلة بكل سهولة.

في نهاية هذا الكتاب وضعنا جداول مختصرة تعطي الطالب كل ما يحتاجه من قوانين علمية درسها في جميع المراحل الدراسية وبينا له الأخطاء الشائعة التي يقع فيها.

ونتقدم بخالص الشكر والتقدير إلى جامعة 7 أكتوبر وأعضاء هيئة التدريس بها وأخص بالذكر أولاً: أ. د. علي سعيد جمال الدين الذي قام بمراجعة الكتاب وثانياً: كلية تقنية المعلومات – مصراته على دعمهم الكامل لنا وسنسعى جاهدين لانجاز الجزء الثاني والثالث

من هذا المؤلف بما يواكب مسيرة العلم، داعين الله عز وجل أن نكون قد وفقنا لما هدفنا إليه كما نتمنى أن يستفيد من هذا المؤلف أكبر عدد من الطلاب وأن يكون مرجعاً مفيداً للمكتبة العلمية العربية .

والله ولي التوفيق..

✍ أ. نادية إسماعيل البرقلي

مصراتة: 2009/12/12

الدوال الأساسية

المجموعات Set

من المفاهيم الأساسية في الرياضيات الحديثة مفهوم المجموعة (الفئة)، ويرجع فضل اكتشاف هذا المفهوم إلى العالم الرياضي جورج كانترو (1854–1918)، ويكتسب هذا المفهوم أهمية خاصة حيث إنه مكن الرياضيين من التعرف على أساليب حديثة لتوحيد فروع الرياضيات المختلفة.

ومفهوم المجموعة مفهوم عام، يتسع للأشياء المجردة والأشياء المحسوسة، حتى ولو كان يتعلق بعلم الرياضيات، ففي لغتنا العربية الكثير من المفردات التي تعبر عن تجمع مجموعة من الأشياء مثل: فصل، باقة، عائلة، خلية وغيرها، ولكن توجد في اللغة كلمة واحدة تؤدي نفس المعنى وهى (مجموعة).

المجموعة:

هي تجمع واضح المعالم من الأهداف التي تدعى عناصر أو أعضاء في المجموعة أو تجمع من الأشياء المتميزة والمعرفة تعريفاً جيداً، ونستخدم عادة الحروف الكبيرة $(A, B, C, D\ldots\ldots)$ للتعبير عن المجموعات، كما نستخدم الحروف الصغيرة $(a, b, c, d\ldots\ldots)$؛ للتعبير عن الأشياء (العناصر) التي تتكون منها المجموعة .

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

1- طريقة الحصر أو القائمة:

وتكون بكتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة، وتوضع بين قوسين على الشكل التالي $\{\quad\}$ ويفصل بين كل عنصر والذي يليه فاصلة (،).

أمثلة :

$$A = \{3, 4, 6, 9\}$$
$$N = \{a, f, g\}$$

2- طريقة الوصف:

إذا كان عدد عناصر المجموعة كبير فانه يمكن التعبير عنها بكتابة عناصرها الأولى، بحيث تكون كافية للتعرف على باقي عناصر المجموعة ثم توضع نقاط تدل على استمرارية عناصر المجموعة بنفس النمط، ثم يكتب العنصر الأخير الذي تنتهي عنده عناصر المجموعة.

مثال :

إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 100 فإنها تكتب على الشكل التالي:

$$Z = \{1,2,3,............... \quad 99\}$$

ملاحظات:

1- ترتيب العناصر في المجموعة ليس له أهمية، فمثلا المجموعة $\{1,2,3\}$هي نفسها المجموعة $\{3,2,1\}$.

2- تكرار العناصر في المجموعة لا يزيد من عدد عناصرها، ويفضل عدم التكرار.

3- يمكن إعطاء خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها، ويمكن تحديد عناصر المجموعة بهذه الخاصية، **فمثلا** $\{\, x : p(x) \,\}$ تمثل المجموعة التي عناصرها x تتمتع بالخاصيةP.

أمثلة:

1) $A = \{\, x : x$ عدد أولي يقع بين $0,12 \,\}$, $A = \{\, 2 , 3 , 5 , 7 , 11 \}$

2) $B = \{\, x \in IN \;:\; 3 \leq x \leq 7 \,\}$ ، $B = \{\, 3 , 4 , 5 , 6,7 \,\}$

3) $C = \{\, x \in IN \;:\; 5 < x < 10 \,\}$ ، $C = \{\, 6, 7 , 8 , 9 \,\}$

ملاحظة:

يستخدم الرمز ($\in$) للدلالة على أن العنصر (ينتمي) إلي المجموعة، ويعني الرمز (:) العبارة (حيث إن).

المجموعة الخالية:

تعرف المجموعة الخالية بأنها المجموعة التي لا تحتوي على أية عناصر، ويرمز لها بالرمز ϕ (فآي)، كما يمكن أن نرمز لها بقوسين خاليين دون أية عناصر $\{\quad\}$.

أمثلة :

$A=\{\ x : x$ (عدد يقبل القسمة على 5 ويقع بين $3,1$) $\}$ هذا يؤدى $A=\{\ \}$

$B=\{\ x : x$ (طالب عمره يتجاوز 100 سنة) $\}$ هذا يؤدى $B=\{\ \}$

المجموعة الجزئية:

إذا كانت A مجموعة جزئية من B، فإن كل عنصر من A هو أيضا في B، ويرمز لذلك بالرمز $A\subseteq B$, حيث $A\subseteq B \Leftrightarrow (s\in A \rightarrow s\in B)$، تكون مجموعة A جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المجموعة A عنصراً من المجموعة B.

قوة المجموعة:

تعرف قوة المجموعة A على أنها مجموعة كل المجموعات الجزئية لهذه المجموعة، ويرمز لها $S(A)$ حيث $S(A)=\{X : X\subseteq A\}$.

ملاحظة:

إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي k؛ فإن عدد عناصر أي قوة المجموعة A هو 2^K.

فمثلا :

إذا كانت $A=\{3\}$ فإن عدد عناصر $S(A)$ هو 2^1،

ويكون $S(A)=\{\phi, \{3\}\}$

إذا كانت $A=\{0,3,6\}$ فإن عدد عناصر $S(A)$ سيكون $2^3=8$.

ويكون

$S(A)=\{\phi, \{0\}, \{3\}, \{6\}, \{0,3\}, \{0,6\}, \{3,6\}, \{0,3,6\}\}$.

المجموعات المنتهية وغير المنتهية: Finite and Infinite sets

تكون المجموعة منتهية إذا كانت خالية، أو تحتوي على n من العناصر حيث إن n عدد صحيح موجب، و تكون المجموعة غير منتهية إذا كان عدد عناصرها غير منتهي .

المجموعات العدودة (القابلة للعد) وغير العدودة

Countable and uncountable sets

يقال عن المجموعة إنها عدودة إذا أمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية أي إذا وجد

تقابل بينها وبين أي مجموعة أعداد طبيعية، ويقال عن المجموعة أنها غير عدودة إذا لم يمكن ذلك.

ملاحظات: 1- كل مجموعة منتهية هي مجموعة قابلة للعد.

2- يوجد مجموعات غير منتهية قابلة للعد مثل مجموعة الأعداد الطبيعية.

أمثلة :

مجموعة الأعداد الطبيعية (مجموعة عدودة وغير منتهية).

مجموعة المستقيمات المارة بنقطة معينة في مستوى (مجموعة غير عدودة وغير منتهية).

مجموعة الأعداد الطبيعية بين 5، 30 (مجموعة عدودة ومنتهية).

المجموعات المتساوية: Equal sets

يقال لمجموعتين A و B أنهما متساويتان $A=B$ إذا وفقط إذا كانت $A\subseteq B$ $B\subseteq A$ ، أي أن المجموعتين المتساويتين هما مجموعتان تحتوى كل منهما عناصر الأخرى.

فمثلا:

1- إذا كانت $A=\{2,3,5,7,11\}$ وإذا كانت B={x:(عدد أولى أصغر من 13)} فإن $A=B$

2- إذا كانت $A=\{1,3,5,7\}$ وإذا كانت $B=\{1,3,5\}$

فإن $A\neq B$ لان $7\notin B$. ، $7\in A$

المجموعات المتكافئة: Equivalent sets

يقال عن المجموعتين أنهما متكافئتان إذا كان هناك تناظر أحادى بين عناصرهما وبمعنى آخر المجموعتان المتكافئتان هما مجموعتان عدد عناصرهما متساو، ويرمز لها بالرمز $\equiv$.

فمثلا:

1- إذا كانت $A=\{0,2,4,6,8,10\}$ وإذا كانت $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ فإن $A\equiv B$

2- إذا كانت $A=\{0,1,3,5\}$ وإذا كانت $B=\{\alpha,\beta,\chi\}$ فإن A لا تكافئ B لان عدد عناصر المجموعة A أربعة وعدد عناصر المجموعة B ثلاثة .

المجموعة الشاملة: Universal Set

هي مجموعة تحوي جميع العناصر محل الدراسة، وبمعنى آخر أن المجموعة الشاملة هي مجموعة تحوي جميع المجموعات الجزئية للمجموعة المدروسة ويرمز لها بالرمز U.

وكأمثلة على المجموعات الشاملة:

مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى الأعداد الطبيعية، مجموعة كل عناصر الأعداد الصحيحة وغيرها من المجموعات.

الاحتواء: Inclusion

يقال عن المجموعة A أنها محتواة في B إذا كانت المجموعة A مجموعه جزئية (Subset) من المجموعة B، أي إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي إلى B، وتكتب عملية الاحتواء على الشكل التالي: $A \subseteq B$

فمثلا:

$$A = \{2, 7, 11\} \ , \ B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$\therefore \ A \subseteq B$$

> **تعريف:**
> المجموعة A مجموعه جزئية فعلية (Proper Subset) من المجموعة B إذا كان $A \subseteq B$, وهناك عنصر في B لا يوجد في A , ونكتب ذلك $A \subseteq B \ , \ A \neq B$, وقد نكتبه في بعض الأحيان $A \subset B$.

بعد تعريفنا للاحتواء نستطيع أن نعرف تساوي مجموعتين كما يلي:

1. $A = B$ وإذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ وكان $B \subseteq A$.
2. معنى $A \subset B$ انه يوجد على الأقل عنصر واحد في المجموعة B غير موجود في المجموعة A و جميع A هي عناصر في B .

ملاحظات:
1- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.
2- المجموعة الخالية وحيدة.
3- قد تكون عناصر المجموعة مجموعات في حد ذاتها.

العمليات على المجموعات Operations On Sets

الاتحاد: Union

إذا كان A , B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين تسمي اتحاد المجموعتين A , B ويرمز لها بالرمز $A \cup B$

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ او } x \in B \}$$

فمثلا :

1- إذا كانت $A = \{0,2,4\}$ و إذا كانت $B = \{a, b, c\}$ فإن $A \cup B = \{0,2,4, a, b, c\}$

2- إذا كانت $A = \{0,1,3,5\}$ و إذا كانت $B = \{0,1,2\}$ فإن $A \cup B = \{0,1,2,3,5\}$

التقاطع: Intersection

إذا كانت A , B مجموعتين، فإن المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين A , B تسمي تقاطع المجموعتين A , B ويرمز لها بالرمز $A \cap B$

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ و } x \in B \}$$

فمثلا:

1- إذا كانت $A = \{0,2,4\}$ وإذا كانت $B = \{a, b, c\}$ فإن $A \cap B = \phi$

2- إذا كانت $A = \{0,1,3,5\}$ وإذا كانت $B = \{0,1,2\}$ فإن $A \cap B = \{0,1,\}$

المجموعة المكملة:

تعرف مكملة المجموعة A على أنها مجموعة كل العناصر غير المنتمية إلى المجموعة A ، بشرط انتمائها إلى المجموعة الشاملة، ويرمز لها بالرمز A^c ، أي أن:

$$A^c = \{ x : x \notin A , x \in U \}$$

ومن هذا التعريف نستنتج أن تقاطع المجموعة مع مكملتها يعطي مجموعة خالية، ومكملة المكملة يعطي المجموعة الأصلية، وكذلك إتحاد المجموعة مع المكملة يعطي المجموعة الشاملة كالتالي:

$$A^c \cap A = \phi$$
$$A^c \cup A = U$$
$$(A^c)^c = A$$

فرق مجموعتين:

إذا كانت A , B مجموعتين؛ فإن فرق المجموعتين $A - B$ هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي توجد في A ، ولا توجد في B ، ويرمز لذلك بالرمز $A - B$

$$A - B = \{ x : x \in A \text{ و } x \notin B \}$$

المكملة النسبية:

إذا كانت $A \subseteq B$ ؛ فإن $A - B$ تسمى مكملة المجموعة B بالنسبة للمجموعة A ، ويرمز لذلك بالرمز B^C . على الرغم من أن المجموعة الشاملة بالمعنى المطلق غير موجودة فإنه في كل حالة نتعامل فيها مع المجموعات تكون هناك مجموعة شاملة نسبية فعلى سبيل المثال: عند التعامل مع مجموعة الأعداد الطبيعية IN ، نستطيع أن نفترض بأن Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة (ونرمز عادة للمجموعة الشاملة بالرمز U) إذا كانت A هي المجموعة الشاملة U ؛ فإن $U - B = A - B$ تسمي مكملة B ، ويرمز لها بالرمز B^C نستطيع تعريف B^C بطريقة أخرى ، وهي:

$$B^C = \{ x : x \notin B \}$$

مثال:

إذا كانت $A = \{1,3,5,7\}$ ، $B = \{2,3,4,5,6,8\}$ وكانت المجموعة الشاملة هي $U = \{1,2,3,4,..,10\}$ فأوجد: $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A - B$, B^c .

الحل:

$$A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$A \bigcap B = \{3,5\}$$
$$A - B = \{1, 7\}$$
$$B^c = \{1,7,9,10\}$$

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,4,8\}$, $B = \{2,3,5,6\}$ وكانت المجموعة الشاملة هي $U = \{1,2,........10\}$ فأوجد: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, B^c .

الحل:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$
$$A \cap B = \{2\}$$
$$A - B = \{1, 4, 8\}$$
$$B^c = U - B = \{1,4,7,8,9,10\}$$

مثال:

إذا كانت، $C = \{2,3,5,7\}$ ، $B = \{1,3,5,7,9\}$ ، $A = \{1,4,9\}$ ، والمجموعة الشاملة هي $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

فأوجد: C^c , A^c , $A \cup B\ B^c$, $A^c \cap B$, $A-B$, $C \cap (B^c \cup A)$.

الحل: $A^c = \{2,3,5,6,7,8\}$, $B^c = \{2,4,5,6,8\}$, $C^c = \{1,4,6,8,9\}$,

$A \cup B = \{1,3,4,5,7,9\}$ $A^c \cap B = \{3,5,7\}$, $A-B=\{4\}$,

جبر المجموعات:

إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات فإنه يمكننا إثبات العلاقات التالية:

1- التبديل $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$.

2- التنسيق $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ و $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3- التوزيع $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4- التكميل $(A^c)^c = A$ $A^c \cup A = U$ $A^c \cap A = \phi$.

5- قانوني دومورجان $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ و $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

ولإثبات العلاقات الجبرية بين المجموعات هناك عدة طرق منها:

1- باستخدام العمليات على المجموعات:

لنبرهن أن $A \cup B = B \cup A$ باستخدام العمليات والتعاريف الأساسية للمجموعات:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ أو $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ أو $x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

منها: $A \cup B = B \cup A$

لنبرهن أيضاً أن $A \cap B = B \cap A$:

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ و $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ و $x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$ منها: $A \cap B = B \cap A$

مثال:

إذا كانت $C = \{2,3,5,7\}$ ، $B = \{1,3,5,7,9\}$ ، $A = \{1,4,9\}$ ،

أثبت أن: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

و $A \cup B = B \cup A$

الحل:

واضح أن:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$\{1,2,3,4,5,7,9\} = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$
،
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$\{1,9\} = \{1,9\}$$
،

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$\{\ \} = \{\ \}$$

وبنفس الطريقة السابقة نستطيع إثبات باقي القوانين.

2- باستخدام جداول الانتماء:

تستخدم جداول الانتماء؛لإثبات قوانين المجموعات، ويتكون جدول الانتماء من أسطر يشتمل كل سطر على احتمالات الانتماء، ويعتمد عدد أسطر هذه الجداول على عدد المجموعات المراد إثبات العلاقة بينها، فإذا كان لدينا مجموعة واحدة؛ فإن الجدول سيتكون من سطرين، أما إذا كان لدينا مجموعتان؛ فإن الجدول سيتكون من أربعة أسطر، وبصفة عامة فإن عدد أسطر جداول الانتماء يمكن تحديده باستخدام العلاقة 2^n حيث n تشير إلى عدد المجموعات، كما سيتضح من خلال استخدام هذه الجداول في إثبات بعض العلاقات السابقة:

لإثبات – قانون التبديل.

إذا كان A, B مجموعتين ؛ فإن إثبات هذه العلاقة كالتالي:

نكوّن جدول يتكون من 4 صفوف من العلاقة $4 = 2^2$:

A	B	$A \cap B$	$B \cap A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

من تطابق العمودين الثالث والرابع نثبت صحة علاقة التبديل.

– قانون التنسيق.

إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات أثبت أن $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$: حيث إن القانون يحتوي علي ثلاث مجموعات؛ فإن عدد الأسطر في جدول الانتماء هو $8 = 2^3$ أسطر، كما هو مبين بالجدول التالي:

A	B	C	$A\cap B$	$A\cap C$	$A\cap(B\cap C)$	$(A\cap B)\cap C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

من الجدول نلاحظ أن $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ لان العامودان الممثلان في جدول الانتماء يحتويان على نفس رموز الانتماء.

خط الأعداد الحقيقية: The Real numbers line

في هذا البند سنقدم عرضاً موجزاً لبنية نظام الأعداد الحقيقية، يتكون خط الأعداد من جميع الأعداد التي يمكن تقسيمها إلى نظامي الأعداد الكسرية (العادية)، والأعداد الصماء على الشكل التالي:

$$-\infty \longleftarrow \ldots\ldots\ldots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots\ldots \longrightarrow +\infty$$

الأعداد الطبيعية: The Natural Numbers

وهى أعداد نظام العد، ويرمز لها بالرمز IN، ويمكن الحصول على عدد منها بجمع العدد 1 إلى نفسه عدد من المرات حيث $IN = \{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}$ وهي مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب، ولكنها غير مغلقة دائماً بالنسبة لعمليتي القسمة والطرح (أي أن حاصل جمع أو ضرب أي عددين طبيعيين ينتج عنها عدد طبيعي أيضاً، ولكن بالنسبة لعمليتي القسمة والطرح لأي عددين طبيعيين لا يكون بالضرورة نتاجها عدداً طبيعياً وهي مجموعة غير منتهية.

الأعداد الصحيحة: The Integer Numbers

وهى الأعداد الطبيعية مضافاً إليها الصفر وسالب الأعداد الطبيعية، وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح، ولكنها غير مغلقة على عملية القسمة، ويرمز لها بالرمز الأتي Z أو I حيث: $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\ldots\}$ وهي مجموعة غير منتهية .

الأعداد القياسية أو الكسرية: The Rational Number

وهى الأعداد التي تكتب على شكل $\frac{a}{b}$ حيث a,b عددان صحيحان و $b\neq0$، ويرمز لمجموعة الأعداد العادية (الكسرية) بالرمز Q أي أن: $Q=\left\{\frac{a}{b} : a,b\in Z , b\neq0\right\}$، وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح، وكذلك القسمة، **نلاحظ** أن أي عدد صحيح a يكون العدد القياسي $\frac{a}{1}$.

العدد الكسري: إما أن يكون عدداً عشرياً منتهياً مثل 0.256، أو عدداً عشرياً غير منته ومتكرر المقاطع ***مثل:*** $\frac{3}{11}=0.272727\ldots\ldots\ldots$, $\frac{1}{3}=0.33333\ldots\ldots\ldots$.

الأعداد غير العادية (الكسرية) The Irrational Numbers

العدد غير الكسري هو العدد الذي لا يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$، حيث a,b يمثلان عددين صحيحين، أي أن الأعداد غير العادية هي الأعداد الحقيقية التي لا تكون أعدادا عادية، ويرمز لمجموعة الأعداد غير العادية بالرمز Q^c أي أن:

$$Q^c = \left\{ r : r \neq \frac{a}{b}, \forall\ a,b \in Z \right\}$$

بعض أمثلة الأعداد غير العادية (الكسرية)

$$\pi = 3.14159265..... \ , \quad \sqrt{2} = 1.41421356.......$$

الأعداد الحقيقية The Real Numbers

الأعداد الحقيقية هي كل الأعداد العادية وغير العادية، وتلك التي لا نستطيع التعبير عنها بكسور، مثل نصف محيط الدائرة التي نصف قطرها الوحدة، والذي نعبر عنه بقيم تقريبية $\pi = 3.14159265......$ وغيرها، ويرمز لها بالرمز IR، أي أن: $IR = Q \cup Q^c$ تمثل الأعداد الحقيقية بنقط على خط أفقي، حيث يقابل كل عدد حقيقي نقطة واحدة فقط، والعكس صحيح كذلك، أي أن كل نقطة على الخط الأفقي يقابلها عدد حقيقي واحد فقط، ويسمى هذا الخط بالخط الحقيقي أو خط الأعداد الحقيقية (Real Line)

$$-\infty \longleftarrow ....-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3........... \longrightarrow +\infty$$

حيث الرمز ∞ (يشير إلى ما لا نهاية) بمعنى أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير منتهية.

ملاحظة:

إن مجموعة الأعداد الطبيعية IN مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة Z، وهى بدورها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العادية Q، والأخيرة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية IR، أي أن:

$$IN \subseteq Z \subseteq Q \subseteq IR \ .$$

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

إذا كانت a,b,c أعداداً حقيقية ، فإن:

$a+b$ عدد حقيقي ، و $a-b$ عدد حقيقي .

$a\times b$ عدد حقيقي ، و $\frac{a}{b}$ حيث $b\neq 0$ عدد حقيقي .

0 عدد حقيقي ، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع

1 عدد حقيقي ، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب .

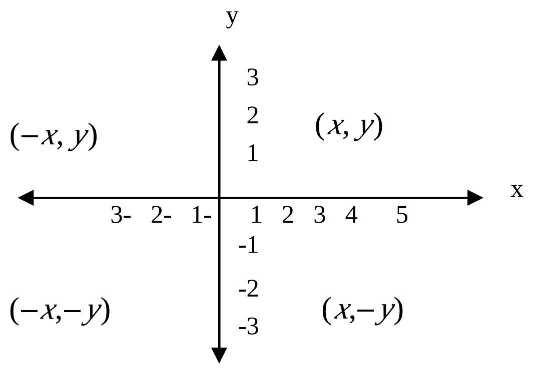
لكل عدد حقيقي a معكوس (نظير) جمعي $(-a)$.

لكل عدد حقيقي a لا يساوى الصفر معكوس(نظير) ضربي $\left(\frac{1}{a}\right)$.

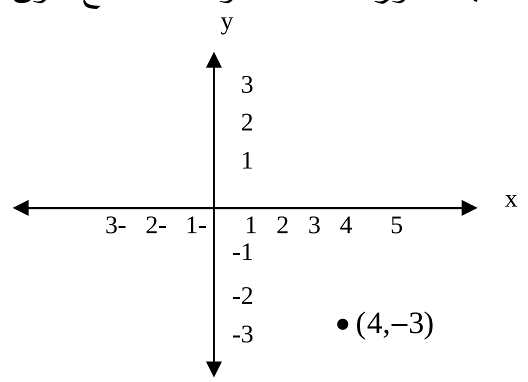
نظام الإحداثيات في بعدين "الإحداثيات المتعامدة أو الديكارتية"

The Rectangular two Dimensions Coordinate system

يتكون نظام الإحداثيات في بعدين من تقاطع خطي أعداد متعامدين عند نقطة الأصل $(0,0)$، ويسمى محور الإحداثيات الأفقي بالمحور x، والمحور الرأسي بالمحور y، ويقسم المستوي إلى أربعة أجزاء متساوية، يسمى كل جزء منها ربع (quaolrant) وتحدد كل نقطة في هذا المستوي ثنائي مرتب "ordered pair"، يرمز له بالرمز (x,y)، و تختلف إشارات الإحداثيات حسب موقعها في المستوى، وتكون كالتالي بفرض x ، y عددان حقيقيان موجبان: في الربع الأول (x,y)، والربع الثاني $(-x,y)$، والربع الثالث $(-x,-y)$، أما في الربع الرابع فهي النقطة $(x,-y)$. ويسمى هذا المستوى أحيانا بالمستوى الديكارتي (الكارتيزي) (plane Rectangular Cartesian Coordinates) نسبة إلى الرياضي الفرنسي ديكارت (1596−1650)؛ حيث كان أول من استخدم نظام الإحداثيات في بعدين . يرمز للمستوي الكارتيزي في بعدين بالرمز IR^2 حيث: $IR^2 = IR\times IR = \{ (x,y) \ : \ x,y \in IR\}$



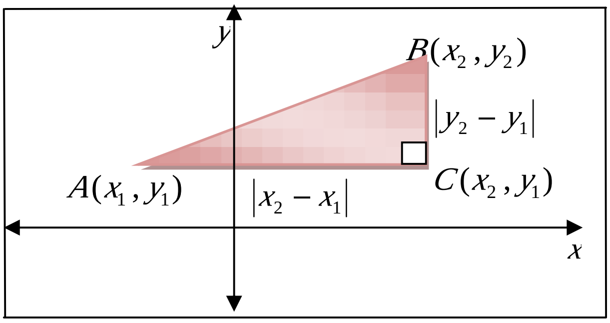
فمثلا: لرسم النقطة $(4,-3)$ نتحرك أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات وثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات، وعند التقاطع تكون النقطة $(4,-3)$.



المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي: Distance Between two points

إذا كانت $A(x_1,y_1)\ ,\ B(x_2,y_2)\ \in IR^2$ ، عندئذ لإيجاد المسافة d بين النقطتين A, B نكوّن المثلث ABC قائم الزاوية في C.

نلاحظ: أن إحداثيات النقطة C هو (x_2,y_1)، وبما أن A,C على خط أفقي واحد فان المسافة AC تساوى $|x_2-x_1|$، وكذلك النقطتان B,C على خط عمودي واحد؛ فان المسافة BC تساوي $|y_2-y_1|$.



من نظرية فيثاغورث ، نجد أن $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ أي أن:

$$d=\sqrt{\overline{AB}^2}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$$

إذا:

$$d=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$$

وبما أن $|x|^2=x^2$ فان:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

وتسمى هذه الصيغة بصيغة المسافة .

مثال:

أوجد المسافة بين النقطتين $(2,5)\ ,\ (-3,7)$.

الحل:

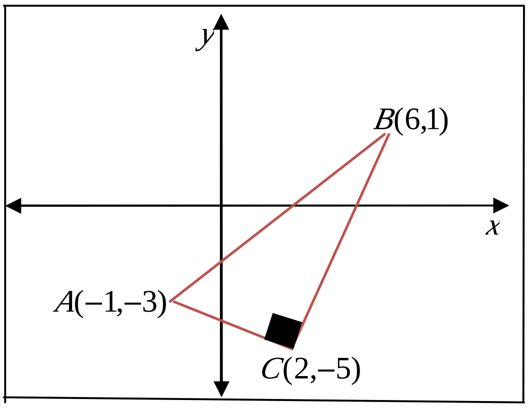
$$\because\ d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\therefore\ d=\sqrt{(-3-2)^2+(7-5)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

مثال:

اثبت أن النقاط $C(2,-5)$, $B(6,1)$, $A(-1,-3)$ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل: باستخدام قانون المسافة بين نقطتين نجد:



$$d(A,B)=\sqrt{(6-(-1)^2)+(1-(-3))^2}$$
$$=\sqrt{(7)^2+(4)^2}=\sqrt{65}$$

$$d(B,c)=\sqrt{(2-6)^2+(-5-1)^2}$$
$$=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}=\sqrt{52}$$

$$d(A,c)=\sqrt{(2-(-1)^2+(-5-(-3))^2}$$
$$=\sqrt{(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$

$$\because\ \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$

$$(\sqrt{65})^2=(\sqrt{52})^2(\sqrt{13})^2$$

$$65=52+13$$
$$65=65$$

إذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

نوجد مساحة المثلث ABC القائم الزاوية في C

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة ×الارتفاع

$$A=\frac{1}{2}(\overline{AC})\times(\overline{BC})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{13}.\sqrt{52}=\frac{1}{2}\sqrt{13}.\sqrt{4.13}$$

$=\frac{1}{2}(2).\sqrt{13}.\sqrt{13}=13$ وحدة مربعة

منتصف المسافة بين نقطتين: Middle of Line Piece

إن إحداثي نقطة منتصف المسافة بين نقطتين $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ هي:

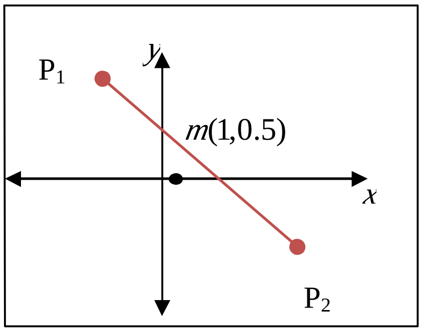
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال:

أوجد النقطة M التي تنصف القطعة المستقيمة الواصلة من النقطة $P_1(-2,3)$ إلى النقطة $P_2(4,-2)$، وارسم النقط M,P_1,P_2، ثم تحقق من أن $d(P_1,M)=d(P_2,M)$.

الحل:

$\because$ نقطة المنتصف M هي:



$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+(-2)}{2}\right)$$

$$M=(1,\frac{1}{2})$$

$$d(P_1,M)=\sqrt{(-2-1)^2+(3-\frac{1}{2})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$d(p_2,M)=\sqrt{(4-1)^2+(-2-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$\therefore\ d(P_1,M)=d(P_2,M)$$

مثال: اوجد قيمة x التي تجعل المسافة بين النقطتين $(-2\ ,\ 3)$, $(x\ ,\ x)$ مساوية 5 وحدات.

الحل: من قانون المسافة بين نقطتين $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)}$

بتربيع الطرفين نحصل على $5=\sqrt{(x+2)^2+(x-3)^2}$

$$25=(x+2)^2+(x-3)$$

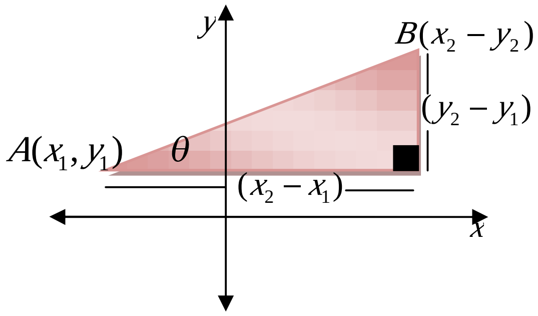
$2x^2-2x-12=0$ ومنها $(x-3)(x+2)=0$

بذلك فإن قيمة $x=2$ أو $x=3$

معادلة الخط المستقيم Equation of straight line

من الموضوعات الهامة في الرياضيات دراسة طرق إيجاد معادلة الخط المستقيم، وذلك بعد معرفة ميله وعلاقة المستقيمات ببعضها .

ميل المستقيم (slope): هو قياس معدل التغير النسبي للاحداثيين x, y للنقطة (x, y) كلما تحركنا على المستقيم AB، كما في الشكل التالي:



تعريف:

لنفترض أن L مستقيم غير(رأسي) عمودي وأن $A\,(x_1, y_1)\,,\,B(x_2\,, y_2)$ نقطتان عليه, فإن ميل المستقيم L والذي سنرمز له بالرمز m يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نلاحظ أن:

- ميل المستقيم هو خارج قسمة فرق الصادات على فرق السينات لأي نقطتين عليه.
- ميل المستقيم العمودي (الرأسي) يساوي ∞، أي أن المستقيم (الرأسي) العمودي له ميل غير معرف.

ملاحظات :

1- إذا كان $m > 0$ ؛ فإن المستقيم يتجه إلي أعلى كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين (زاوية الميل حادة) .

2- إذا كان $m < 0$ ؛ فإن المستقيم يتجه إلى أسفل كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين

3- (زاوية الميل حادة) .

4- ميل المستقيم m هو ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع محور السينات، أو المستقيم الموازي لمحور السينات، أي أن: $m = \tan\theta$.

شرط توازي مستقيمين :

إذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1 ، وميل المستقيم L_2 هو m_2 ؛ فإن $m_1 = m_2$ إذا وفقط إذا كان L_1 يوازي L_2 .

شرط تعامد مستقيمين:

إذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1 ، وميل المستقيم L_2 هو m_2 ؛ فإن $m_1 \times m_2 = -1$ إذا وفقط كان L_1 عمودي على L_2 .

مثال:

إذا وقعت النقطتان $(2,1)$, $(1,-1)$ على المستقيم L_1 ؛ ووقعت النقطتان $(0,4)$, $(-2,0)$ على المستقيم L_2 ، فحدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين .

الحل:

$$m_2 = \frac{4-0}{0+2} = 2 \quad ، \quad m_1 = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

إذا المستقيمان L_1 L_2 متوازيان ؛ لأن $m_1 = m_2$

مثال:

إذا كان المستقيم L_1 يمر بالنقطتين $(1,-2)$, $(5,6)$ فأوجد ميل L_2 الذي يكون عمودي على المستقيم L_1 .

الحل:

$$m_1 = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

بما أن L_2 عمودي على L_1 فإن:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{-1}{2}$$

مثال:

إذا مر المستقيم L_1 بالنقطتين $(6,-2)$, $(2,-6)$ ، فأوجد ميل L_2 الذي يكون عمودي على المستقيم L_1 و L_3 الموازي للمستقيم L_1 .

الحل:

نوجد أولا ميل L_1 $m_1 = \frac{-2+6}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$ ومنها يكون ميل L_2 هو $L_2 = -1$ أما ميل L_3 يكون $L_3 = 1$ حسب التعريف السابق.

معادلة الخط المستقيم وطرق إيجادها:

المعادلة العامة لمعادلة المستقيم هي $Ax+By+C=0$، حيث A,B,C أعداد، ويشترط ألا يساوي كلاً من A و B صفراً في آن واحد . بذلك تكون الصورة العامة لمعادلة خط المستقيم هي

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ بوضع $\frac{A}{B}=m$ وهي تمثل ميل المستقيم و $\frac{C}{B}=b$ تمثل الجزء المقطوع من y .

دراسة المعادلة العامة لمعادلة المستقيم: General Equation

إذا كان $C=0$ ؛ فإن $Ax+By=0$ ومنها: $y=\frac{-A}{B}x$

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $m=\frac{-A}{B}$

فمثلا:

$y=-\frac{8}{3}x$ هي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $\frac{-8}{3}$.

إذا كان $B=0$ و $A\neq 0$ فإن $Ax+C=0$ ومنها: $x=-\frac{C}{A}$

وهي معادلة مستقيم رأسي يوازي محور الصادات، ويقطع جزءاً من محور السينات مقداره $\frac{-C}{A}$.

فمثلا:

$x=-\frac{9}{4}$ هو مستقيم يوازي المحور yy' ويمر بالنقطة $\left(\frac{-9}{4},0\right)$

إذا كان $B\neq 0$, $A=0$ فإن $By+C=0$ ومنها: $y=-\frac{C}{B}$

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات، ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره $-\frac{C}{B}$.

فمثلا:

$y=\frac{2}{5}$ هو مستقيم يوازي المحور xx' ويمر بالنقطة $\left(0,\frac{2}{5}\right)$.

طرق إيجاد معادلة المستقيم:

1- معادلة المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليهPoint – slope form :

لنفرض أن المستقيم L (غير رأسي) يمر بالنقطة (x_1, y_1)، وأن ميله m نأخذ أي نقطة عامة $p(x, y)$ على المستقيم L فنجد من صيغة الميل أن $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

وهذا يكافئ $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

وهذه هي صيغة معادلة المستقيم L بمعلومية ميله ونقطة عليه .

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(5,-7)$ ، ويوازي المستقيم $6x + 3y - 4 = 0$.

الحل:

معادلة المستقيم المار بالنقطة $(5,-7)$ هي:

$$(y - y_1) = m\,(x - x_1)$$
$$(y + 7) = m\,(x - 5)$$

$\because$ المستقيم يوازي المستقيم $6x + 3y - 4 = 0$

$$m = \frac{-6}{3} = -2$$

$\therefore$ معادلة المستقيم هي:

$$y + 7 = -2\,(x - 5)$$
$$y + 7 = -2x + 10$$
$$y + 2x = 3$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,7)$, $B(-3,2)$ عند منتصف AB .

الحل:

إحداثي منتصف قطعة مستقيمة هي:

$$p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

وبالتالي يكون $p = \left(\frac{1 + (-3)}{2}, \frac{7 + 2}{2}\right) = \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

$\because$ المستقيم عمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين

$$\therefore \quad m_1 \times m_2 = -1$$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-7}{-3-1} \quad \rightarrow \quad m_1 = \frac{5}{-4}$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{-1}{\frac{5}{-4}} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ معادلة المستقيم هي $(y - y_2) = m_2\,(x - x_2)$

$$(y-2) = \frac{4}{5}(x+3) \quad \rightarrow \quad 5y - 10 = 4x + 12$$

$$5y - 4x - 22 = 0$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ وعمودي على المستقيم $2x + 4y - \frac{8}{9} = 0$.

الحل:

$\because$ معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ هي:

$$(y - y_1) = m\,(x - x_1)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) = m\,(x + 4)$$

$\because$ المستقيم عمودي على المستقيم $2x + 4y - \frac{8}{9} = 0$

$\because$ ميل هذا المستقيم هو $m_1 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ ميل المستقيم العمودي هو m_2

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} \quad \rightarrow \quad m_2 = 2$$

$\therefore$ معادلة المستقيم هي:

$$y - \frac{1}{2} = 2(x+4)$$

$$y - \frac{1}{2} = 2x + 8 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 8 + \frac{1}{2}$$

$$y = 2x + \frac{17}{2}$$

2- معادلة مستقيم بدلالة نقطتين منه Two points- form:

إذا كانت النقطتان $B(x_2,y_2)$ و $A(x_1,y_1)$ تقع على المستقيم L، فإن ميله m هو $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$، نختار إحدى النقطتين، ولتكن $A(x_1,y_1)$، والميل الذي حصلنا عليه، ونستخدم الصيغة السابقة $(y-y_1)=m_1\,(x-x_1)$.

أي أن: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

وهذه هي معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين $A(x_1,y_1)\ ,\ B(x_2,y_2)$.

مثال:

عين معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(3,-2)\ ,\ (1,4)$.

الحل:

باستخدام صيغة النقطتين نجد: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$y+2=\frac{4+2}{1-3}(x-3)$$
$$y+3x=7$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{7}{3}\right)\ ,\ \left(\frac{2}{8}\ ,\frac{1}{4}\right)$.

الحل:

باستخدام صيغة النقطتين نجد: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$\left(y-\frac{7}{3}\right)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{7}{3}}{\frac{2}{8}-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow\ \left(y-\frac{7}{3}\right)=\frac{\frac{-25}{12}}{\frac{7}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow\ \left(y-\frac{7}{3}\right)=\frac{-50}{84}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y\frac{-50}{84}x+\frac{50}{168}+\frac{7}{3}\ \rightarrow\ y=\frac{-50}{84}x+\frac{392}{168}$$

$$y=\frac{-25}{42}x+\frac{49}{21}$$

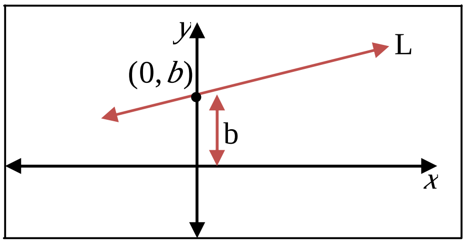
3- معادلة المستقيم بدلالة ميله والجزء الذي يقطعه من محور الصادات:

Slope – Intercept form

لنفرض أن المستقيم L يقطع جزءاً من محور الصادات مقداره b، وأن ميله m ، فإذا استعملنا صيغة الميل ونقطة نجد أن: $(y - y_1) = m_1\ (x - x_1)$

وهذا يكافئ $y = m\,x + b$

وهي معادلة المستقيم الذي يقطع الجزء b من محور الصادات وميله m



مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{2}$ ويقطع $\frac{3}{4}$ من محور الصادات.

الحل:

صيغة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات هي: $y = m\,x + b$ منها نحصل على $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{4}$ وهذا يكافئ: $2x + 4y = 3$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $\frac{1}{2}x + 4y + \frac{5}{4} = 0$ ويقطع $\frac{1}{2}$ من محور الصادات

الحل:

$\because$ المستقيم يوازى المستقيم $\frac{1}{2}x + 4y + \frac{5}{4} = 0$

$\therefore$ ميله هو $m = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{-1}{8}$

$\because$ صيغة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات هي: $y = m\,x + b$

نجد: $y = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{2}$

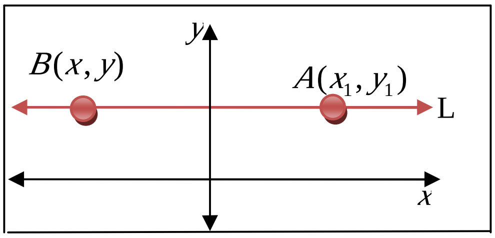
4- معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (x_1, y_1):

Equation of a Horizontal line

بما أن المستقيم L أفقيُ أي يوازي محور السينات فإن ميله؛ $m=0$، لأن الإحداثي الصادي لأي نقطة هو y_1. إذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L فإن:

$$y - y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = y_1$$

وهى معادلة المستقيم الأفقي المار بالنقطة (x_1, y_1):



مثال:

أوجد معادلة المستقيم الأفقي والمار بالنقطة $(2,1)$.

الحل:

معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) هي $y = y_1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $y = 1$

مثال:

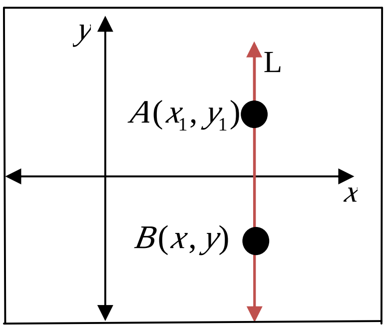
أوجد معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

الحل:

معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) هي $y = y_1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي: $y = \frac{3}{4}$

5- معادلة المستقيم الرأسي والمار بالنقطة (x_1, y_1) **A vertical line:**



بما أن المستقيم L رأسيا أي يوازي محور الصادات، وأن الإحداثي السيني لأي نقطة عليه هو x_1، وإذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L فإن: $x - x_1 = 0$ وبذلك تكون معادلة المستقيم الرأسي والمار بالنقطة (x_1, y_1) هي: $x = x_1$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{4}\right)$.

الحل:

معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) هي $x = x_1$

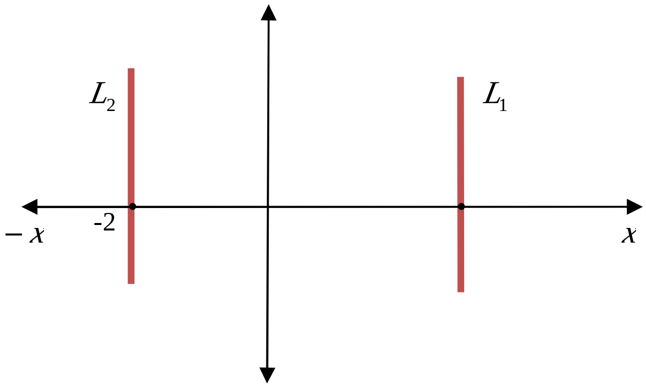
$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $x = \frac{3}{5}$

مثال:

برهن أن المستقيمان $x = 5$ و $x = -2$ متوازيان.

الحل :

بما أن المستقيمان رأسيان فإن كل منهما يوازي محور الصادات وبالتالي هما متوازيان.

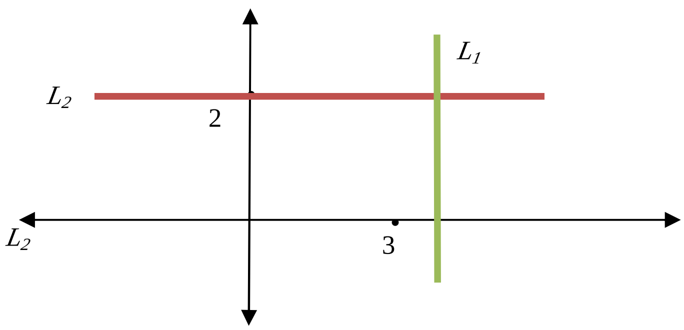


مثال:

برهن أن المستقيمان $x = 3$ و $y = 2$ متعامدان.

الحل:

بما أن المستقيم الأول رأسي والمستقيم الثاني أفقي فإن الأول يوازي محور السينات والثاني يوازي محور الصادات فنهما متعامدان



المتباينات Inequalities

يمكن تعريف إشارات المتباينة على النحو التالي: $> \; , \; < \; , \; \leq \; , \; \geq$، والتي تدعى على الترتيب: أصغر، أكبر، أصغر أو يساوي، أكبر أو يساوي على الشكل التالي:

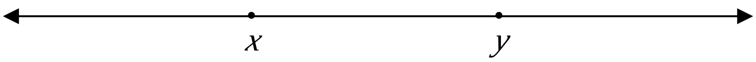
$x<y$ تعني أن $y-x$ موجب.

$y<x$ تعني أن $y-x$ سالب.

$x \leq y$ تعني أن $y-x$ ليس سالباً.

$y \leq x$ تعني أن $y-x$ ليس موجباً.

وهندسياً على محور الأعداد الحقيقية تعني العبارة $x<y$ أن النقطة x تكون على خط الأعداد على يسار النقطة y.



فمثلاً:

1) $4<3$ أو $3<4$ تعني أن 3 أصغر من 4 أو 4 أكبر من 3.

2) $x \leq 5$ تعني أن x عدد حقيقي أصغر أو يساوي 5، فهو أي عدد حقيقي لا يزيد عن 5.

3) $2<x<6$ تعني أن x أي عدد حقيقي موجود مابين 2، 6، وهو أكبر من 2 وأصغر من 6.

بعض خواص المتباينات: Properties of Inequalities

إذا كانت $a \; , \; b \; , \; c$ أعداداً حقيقة فإنَّ:

1) إذا كان $a<b$ و $b<c$ فإن $a<c$

2) إذا كان $a<b$ فإن $a \pm c < b \pm c$

3) إذا كان $a<b$ و $c>0$ فإن $a \times c < b \times c$ لأي عدد حقيقي c.

4) إذا كان $a<b$ و $c<0$ فإن $a \times c > b \times c$ لأي عدد حقيقي c.

5) إذا كان $a>0$ فإن $\frac{1}{a}>0$ وإذا كان $a<0$ فإن $\frac{1}{a}<0$.

6) إذا كان $0<a<b$ فإن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

7) إذا كان $a \times b > 0$ فإن كلاً من a,b إشارة واحدة .

8) إذا كان $a \times b < 0$ فإن كلاً من a,b ذات إشارة مختلفة عن الآخر .

9) إذا كان $a<b$ و $c<d$ فإن $a+c<b+d$.

فمثلاً:

1) $2<1$ و $4<2$ هذا يؤدي إلي $4<1$.

2) $2<1$ وبالتالي $1+3<2+3$ ، $1-3<2-3$.

3) $2<5$ وبالتالي $2\times 3<5\times 3$.

4) $2<5$ وبالتالي $2\times(-3)>5\times(-3)$.

5) $0>2$ وبالتالي $\frac{1}{2}>0$ و $-2<0$ وبالتالي $-\frac{1}{2}<0$.

6) $2<3$ وبالتالي $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$.

7) $2\times 3>0$ وبالتالي $2>0$، $3>0$.

$(-2)\times(-3)>0$ وبالتالي $-2<0$، $-3<0$.

8) $2\times(-3)>0$ وبالتالي $2>0$، $-3<0$.

$(-2)\times 3<0$ وبالتالي $-2<0$، $3>0$.

9) $2<3$ و $4<5$ وبالتالي $2+4<3+5$.

الفترات (المجالات) Intervals:

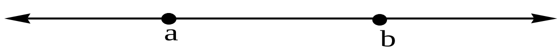
تعريف:

الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية IR، ولها أحد الأشكال التالية:

1− الفترة (المجال) المغلقة Closed Interval

ويرمز لها بالشكل $[a,b]$ حيث $a<b$، وتشكل مجموعة الأعداد الحقيقية من محور الأعداد الحقيقية الواقعة بين العددين a , b، متضمنا الطرفين a , b، وتكتب (رياضياً) على الشكل:

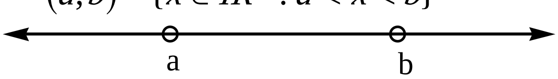
$$[a,b]=\{x\in IR \ : a\le x\le b\}$$



2− الفترة (المجال) المفتوحة Interval Open

ويرمز لها بالرمز $]a,b[$ أو (a,b) حيث $a<b$ وتشكل مجموعة الأعداد الحقيقية من محور الأعداد الحقيقية الواقعة تماماً بين العددين a , b، وتكتب (رياضياً) على الشكل:

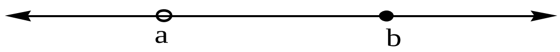
$$(a,b)=\{x\in IR \ : a<x<b\}$$



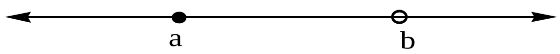
3- الفترة (المجال) نصف المفتوحة أو نصف المغلقة (Half Closed Half Open) Interval

ويمز لهما بالرمز $(a,b]$ أو $[a,b)$، وتكتب (رياضياً) على الشكل:

$$(a,b] = \{x \in IR \ : a < x \leq b\}$$



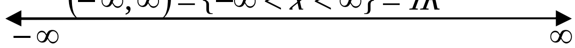
$$[a,b) = \{x \in IR \ : a \leq x < b\}$$



ملاحظة:

يمكن لأحد طرفي الفترة أو كلاهما أن يكون في اللانهاية الموجبة أو السالبة، وعندها سيكون ذلك الطرف مفتوحاً.

$$(-\infty,\infty) = \{-\infty < x < \infty\} = IR$$



فمثلاً: أكتب مجموعات الأعداد الحقيقية التالية على شكل فترات.

1) إذا كانت $A = \{x \in IR : 1 \leq x \leq 3\}$ فإن $A = [1,3]$.

2) إذا كانت $B = \{x \in IR : -1 < x \leq 6\}$ فإن $B = (-1,6]$.

3) إذا كانت $C = \{x \in IR : 4 < x < 10\}$ فإن $C = (4,10)$.

4) إذا كانت $D = \{x \in IR : 3 \leq x < 7\}$ فإن $D = [3,7)$.

5) إذا كانت $E = \{x \in IR : 8 < x\}$ فإن $E = (8,\infty)$.

6) إذا كانت $F = \{x \in IR : x \leq -2\}$ فإن $F = (-\infty,-2]$.

بعد التعرف على أنواع الفترات نتطرق إلي حل أنواع المتباينات على النحو التالي:

أ- حل المتباينة $ax + b > 0$:

لحل المتباينة الخطية نتبع الخطوات التالية:

1- نحل المعادلة $ax + b = 0$ فنجد الجذر $x = \frac{-b}{a}$ ، $a \neq 0$.

2- ننظم جدولاً لدراسة إشارة المقدار من الشكل:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	∞
$ax+b=0$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

3- نوجد الفترة الموافقة لإشارة المتباينة .

مثال:

أوجد حل المتباينة $2x+1>2$.

الحل:

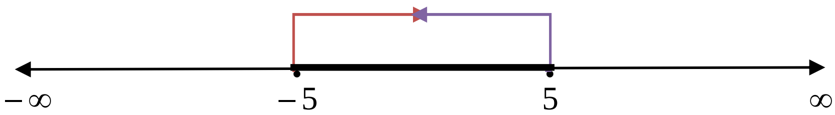
يتم حل هذه المتباينة بإضافة (-1) إلي طرفي المتباينة

$2x+1-1>2-1$ هذا يودي إلي $2x>1$ بالقسمة على 2 نحصل على $x>\frac{1}{2}$ وبذلك يكون الحل الفترة $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

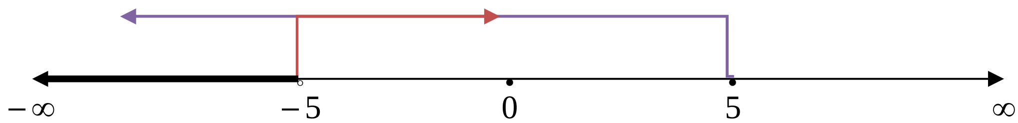
مثال:

إذا كانت $A=\{x:x\leq 5\},\ B=\{x:x\geq -5\}$ أوجد $A\cap B$ ، $A-B$ ، موضحاً الحل على خط الأعداد.

الحل:



$A\cap B=[-5,5]$



$A-B=(-\infty,-5)$

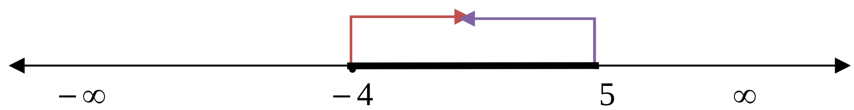
مثال:

أوجد حل المتباينة ومثلها بيانياً على خط الأعداد $-11\leq 2x-3<7$.

الحل:

بإضافة (3) للإطراف $-8\leq 2x<10$ وبالقسمة على (2) نجد $-4\leq x<5$

وبذلك تكون مجموعة الحل هي: $[-4,5)$



مثال:

إذا كان لدينا المتباينة $3x+5\le x-7$ أوجد حلها.

الحل:

يتم حل هذه المتباينة بإضافة العدد -5 فنحصل على $3x\le x-12$، و نضيف المقدار $-x$ إلى طرفي المتباينة فنحصل على $2x\le -12$، و بقسمة المتباينة على 2 نحصل على $x\le -6$، و هكذا يكون مجال الحل هو $(-\infty,-6]$.

مثال:

حل المتباينة $1-3x>2$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

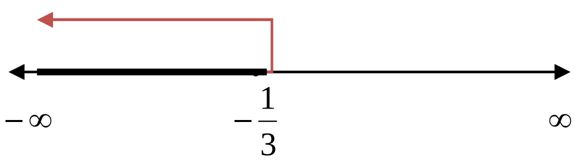
الحل:

بإضافة (-1) للطرفين يكون $1-3x-1>2-1$

أي $-3x>1$ وبالضرب في $(-\frac{1}{3})$ ، يكون لدينا $x<-\frac{1}{3}$

(لاحظ إشارة المتباينة تغيرت في هذه الحالة).

أي أن: أي عدد أصغر من $-\frac{1}{3}$ يعتبر حلا لهذه المتباينة، والحل هو الفئة $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$



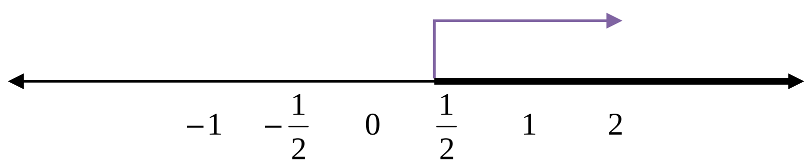
مثال:

حل المتباينة $2x>1$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

بالضرب في $(\frac{1}{2})$ نحصل على $x>\frac{1}{2}$ أي أنَّ:

أي عدد أكبر من $(\frac{1}{2})$ يُعتبر حلاً لهذه المتباينة و الحل هو الفئة $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$



ب-حل المتباينة $ax^2 + bx + c > 0$:

لحل متباينة الدرجة الثانية نتبع الخطوات التالية:

1- نحل معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ فنجد جذورها إن وجدت.

2- ننظم جدول من الشكل التالي:

x	$-\infty$	بينهما	x_1	بينهما	x_2	بينهما	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		من إشارة a	0	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

مثال:

حل المتباينة $x^2 + 3x + 2 < 0$، مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ معادلة الدرجة الثانية $x^2 + 3x + 2 = 0$ فنلاحظ انه يمكن أن تكتب $(x+1)(x+2) = 0$ وبالتالي جذريها: $x_2 = -2$ $x_1 = -1$ ، ومنها نكون الجدول:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	-1	بينهما	$+\infty$
$x^2 + 3x + 2$		+	0	−	0	+	

الفترة الموافق للقيمة السالبة لكثيرة الحدود هي (-2، -1) .

طريقة ثانية للحل: $x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) < 0$

هناك احتمالية:

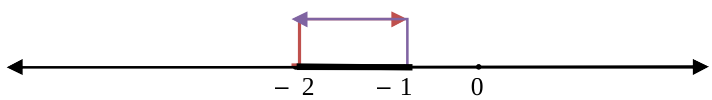
إما $(x+1) > 0$ و $(x+2) < 0$

أو $(x+2) > 0$ و $(x+1) < 0$

في الاحتمال الأول يكون $x < -1$ و $x > -2$ وبالتالي مجال الحل هو:

$$(-\infty,-1) \cap (-2,\infty) = (-2,-1)$$

وفي الاحتمال الثاني يكون $x > -1$ و $x < -2$، وبالتالي مجال الحل φ، وبالتالي يكون مجال الحل الكلي وفق الاحتمالات السابقة هو $(-2,-1) \cup \varphi = (-2,-1)$ كما موضح على خط الأعداد.



مثال:

حل المتباينة $x^2 - 2x \geq 0$ ، مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

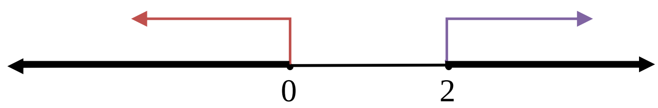
نحل معادلة الدرجة الثانية $x^2 - 2x = 0$ والتي تكتب على الشكل $x(x-2) = 0$

وبالتالي:

$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$ ومنها نكون الجدول:

x	$-\infty$	بينهما	0	بينهما	2	بينهما	∞
$x^2 - 2x$		+	0	−	0	+	

الفترة الموافق لـ x أكبر أو تساوي الصفر لكثيرة الحدود وهي إتحاد الفترتين $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$.



مثال:

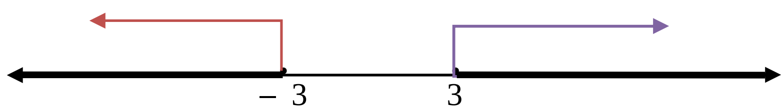
حل المتباينة $9 - x^2 \leq 0$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ المعادلة $9 - x^2 = 0$ ونحللها إلى الشكل $(3-x)(3+x) = 0$ ، وبذلك نجد الجذرين $x = -3, \quad x = 3$ وبالتالي نكون الجدول:

x	$-\infty$	بينهما	**-3**	بينهما	**3**	بينهما	∞
$9 - x^2$		−	0	+	0	−	

وبالتالي نجد الفترة الموافقة لقيم x المناسبة لإشارة المتباينة، وهي إتحاد الفترتين $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$.



مثال:

حل المتباينة $x^2 + x - 2 > 0$.

الحل:

يعني أنَّ المقدارين $(x+2)\ (x-1) > 0$ إمَّا أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً $(X+2)$ و $(x-1)$

أ– المقدران موجبان: $x+2>0 \ \rightarrow \ x>-2$

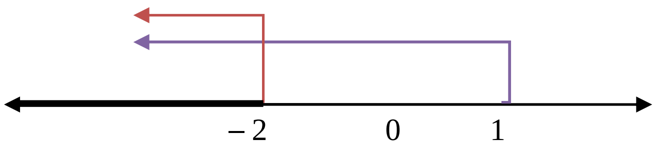
$x-1>0 \ \rightarrow x>1$



∴ فئة التقاطع = فئة الحل = $(1\ ,\ \infty)$

ب–المقدران سالبان: $x+2<0 \ \rightarrow \ x<-2$

$x-1<0 \rightarrow x<1$



∴ فئة التقاطع هي فئة الحل = $(-\infty\ ,\ -2)$

∴ فئة الحل من أ ، ب هي: $x \in (-\infty,-2) \cup (1\ ,\ \infty)$



من الرسم يتضح أن لهما نفس الإشارة في اتحاد الفترتين $(-\infty,-2) \cup (1\ ,\ \infty)$.

3– حل المتباينة الكسرية $\dfrac{ax\ +\ b}{cx\ +\ d} > 0$:

لحل المتباينة الكسرية نكون جدولاً يبين إشارات البسط، والمقام ثم نحدد إشارة الكسر، ونوجد الفترة المطلوبة:

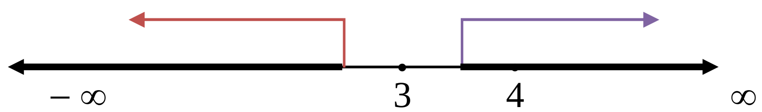
مثال: حل المتباينة $\frac{x}{x-3} < 4$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ المتباينة $\frac{x}{x-3} < 4$ ، ومنها $\frac{x}{x-3} - 4 < 0$ ، والتي تأخذ الصورة التالية $\frac{x-4(x-3)}{x-3} < 0$ ، وبذلك نحصل على $\frac{12-3x}{x-3} < 0$ أو $\frac{4-x}{x-3} < 0$ ثم نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	3	بينهما	4	بينهما	∞
$4-x$		+	+	+	0	−	
$x-3$		−	0	+	+	+	
$\frac{4-x}{x-3}$		−	II	+	0	−	

الفترة التي تحقق المتباينة هي: $(-\infty,3) \cup (4,\infty)$



مثال:

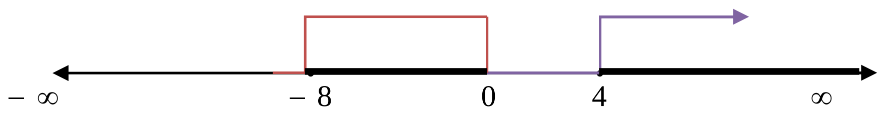
حل المتباينة $\frac{3}{x-4} \le \frac{2}{x}$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ المتباينة $\frac{3}{x-4} \le \frac{2}{x}$ ، و منها $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x} \le 0$ ، والتي تأخذ الصورة التالية $\frac{2(x-4)-3x}{x(x-4)} \le 0$ ومنها $\frac{-x-8}{x(x-4)} \le 0$ أو $\frac{x+8}{x(x-4)} \ge 0$ ثم نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	**-8**	بينهما	**0**	بينهما	4	بينهما	∞
$x+8$		−	0	+	+	+	+	+	
$x(x-4)$		+	+	+	0	−	0	+	
$\frac{x+8}{x(x-4)}$		−	0	+	II	−	II	+	

الفترة التي تحقق المتباينة هي: $(-8,0)\cup(4,\infty)$



مثال:

حل المتباينة $\frac{x+1}{x+3}>0$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

لدينا $\frac{x+1}{x+3}>0$ حتى يكون الكسر موجباً يجب أن يكون للبسط والمقام الإشارة ذاتها وبالتالي نكون أمام احتمالين

أ: نفرض أنّ: $x+1>0$ و $x+3>0$ و بالتالي يكون لدينا:

$x>-1$ و $x>-3$ والحل هو التقاطع الذي يكون على النحو التالي:

$$(-1,-\infty)\cap(-3,\infty)=(-1,\infty)$$

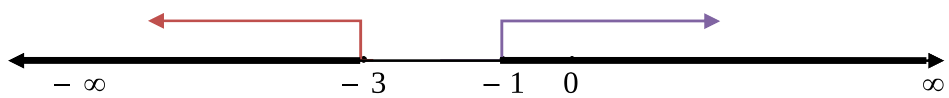
ب− نفرض أنّ: $x+1<0$ و $x+3<0$ و بالتالي يكون لدينا:

$x<-1$ و $x<-3$ والحل هو التقاطع الذي يكون على النحو التالي:

$$(-\infty,-3)\cap(-\infty,-1)=(-\infty,-3)$$

إذن الحل العام للمتباينة هو إتحاد الحلين أي أن:

مجموعة الحل للمتباينة $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$



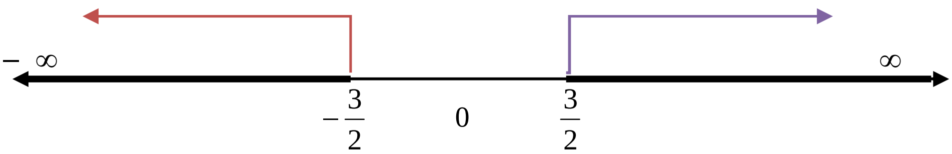
مثال:

حل المتباينة: $\frac{9}{4}\leq x^2$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نكتب المتباينة على الشكل التالي: $x^2 \ge \frac{9}{4}$ منها نحصل على $\left|x^2\right| \ge \frac{9}{4}$ بذلك يكون لــ x

احتماليه: $x \ge \frac{3}{2}$ أو $x \ge \frac{-3}{2}$



إذاً مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty\ ,\ -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}\ ,\ \infty)$

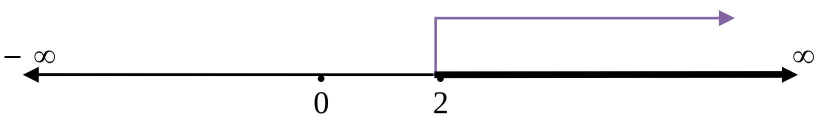
مثال:

حل المتباينة : $\frac{x+1}{x-2} > 1$ مع توضيح الحل على خط الأعداد ؟

الحل:

نكتب المتباينة على الشكل التالي : $\frac{x+1}{x-2} - 1 > 0$ منها نحصل على $\frac{x+1-(x-2)}{x-2} > 0$

هذا يودي إلى أن $\frac{3}{x-2} > 0$ منها تكون قيمة x هي : $x > 2$



إذاً مجموعة الحل للمتباينة هي $(2, \infty)$

القيمة المطلقة Absolute value:

إذا كان x عدداً حقيقياً، فإن القيمة المطلقة للعدد x هي عدد حقيقي غير سالب، يرمز له بالشكل $|x|$ ويعرف على الشكل التالي:

$$|x| = \begin{cases} x & ,if \quad x \geq 0 \\ -x & ,if \quad x < 0 \end{cases}$$

عندما نمثل الأعداد الحقيقية هندسيا على المحور الحقيقي فإن العدد $|x|$ هو المسافة الفاصلة بين نقطة الأصل $(0,0)$ و قيمة x.

بعض خواص القيمة المطلقة: Properties of Absolute Value

مهما يكن العددان $x, y \in R$ يكون لدينا:

$1- \quad -|x| \leq x \leq |x|$

$2- \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad , \quad |x|^2 = x^2$

$3- \quad |x| = |-x|$

$4- \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$5- \quad |x| = a \quad , \quad a \geq 0 \Leftrightarrow x = a \quad or \quad x = -a$

$6- \quad |x| \leq a \quad , \quad a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-a, a]$

$7- \quad |x| \leq a \quad , \quad a < 0 \Leftrightarrow \varphi$ مجموعة حلول المتباينة ستكون

$8- \quad |x| \leq a \quad , \quad a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a or \quad x \leq -a \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$

$9- \quad |x| \geq a \quad , \quad a \leq 0 \Leftrightarrow x \in R$

$10- \quad x^2 \geq a \quad , \quad a \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq \sqrt{a} \quad or \quad x \leq -\sqrt{a}$

$11- \quad x^2 \geq a \quad , \quad a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

$12- \quad |x + y| \leq |x| + |y|$

$13- \quad |x - y| \geq |x| - |y|$

$14- \quad |x.y| \geq |x|.|y|$

$15- \quad \left|\frac{x}{y}\right| \geq \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad |y| \neq 0$

مبرهنة Theorem:

إذا كانت a عدداً حقيقياً موجباً، و x أي عدد حقيقي، فإن: $|x| \le a$ إذا وفقط إذا $-a \le x \le a$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|x-7| \le 5$.

الحل:

من المبرهنة السابقة $|x-7| \le 5 \Rightarrow -5 \le x-7 \le 5$ بإضافة العدد 7 إلى طرفي المتباينة نحصل على $2 \le x \le 12$ إذن مجموعة حلول المتباينة هي $x \in [2,12]$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|x-4| = 6$.

الحل:

واضح أن $|x-4| = 6 \Rightarrow x-4=6$ أو $x-4=-6$

ومنها نحصل على $x=-2$ أو $x=10$ إذن مجموعة الحل هي $x \in \{-2 , 10\}$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|x^2-4| \ge 5$.

الحل:

واضح أن $|x^2-4| \ge 5 \Rightarrow x^2-4 \ge 5$ أو $x^2-4 \le -5$

ومنها نحصل على $x^2 \le -1$ أو $x^2 \ge 9$ سندرس كلً احتمالية على حدة:

أولاً: $x^2 \ge 9$ هذا يؤدي إلى ($|x| \ge 3 \Rightarrow x \le -3$ أو $x \ge 3$) ومنها $x \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$. **ثانياً:** $x^2 \le -1$ وهذا يؤدي إلى أن مجموعة الحل مجموعة خالية .

إذن مجموعة حل المتباينة $|x^2-4| \ge 5$ هي

$(-\infty,-3] \cup [3,\infty) \cup \varphi = (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|2x+1| > | 3x-2 |$.

الحل:

واضح أن $| 3x-2 | < |2x+1| \Rightarrow | 3x-2 |^2 < |2x+1|^2$ منها نحصل على

$(3x-2)^2 < (2x+1)^2 \Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 < 4x^2 + 4x + 1$

بذلك نحصل على $9x^2 - 12x + 4 - 4x^2 - 4x - 1 < 0$

ومنها $5x^2 - 16x + 3 < 0$ أي أن $(5x-1)(x-3) < 0$ إذن فئة الحل هي $x \in \left(\frac{1}{5}, 3\right)$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $4 < \left| \frac{2x-1}{x+1} \right|$.

الحل:

من الواضح أنه من أجل $x \neq -1$ يكون $|2x-1| < 4|x+1| \Rightarrow 4 > \left| \frac{2x-1}{x+1} \right|$ بتربيع طرفي المتباينة نحصل على $|2x-1|^2 < 16|x+1|^2$، هذا يؤدي إلى $(2x-1)^2 < 16(x+1)^2$،

ومنها نحصل على $16x^2 + 32x + 16 - 4x^2 + 4x - 1 > 0$

أي أن $4x^2 + 12x + 5 > 0 \Rightarrow (2x+1)(2x+5) > 0$ إذا

مجموعة حلول المتباينة هي $x \in \left(-\infty, \frac{-5}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, \infty\right) - \{-1\}$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $2x + |x+1| > -1$.

الحل:

لدينا $| x+1 | = \begin{cases} x+1 & ,if \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & ,if \quad x+1 < 0 \end{cases}$

هناك احتمالين:

الاحتمال الأول: $x+1 \geq 0$ هذا يؤدي $|x+1| = x+1$ منها نحصل على

$2x + |x+1| \geq -1 \Rightarrow 2x + x + 1 > -1$

أي أن $3x+1>-1 \Rightarrow 3x>-2$ منها $x>\frac{-2}{3}$.

ومجموعة الحلول في هذا الاحتمال هي التي تحقق: $x>\frac{-2}{3}$ و $x+1>0$

أي أن مجموعة الحل هي: $x\in\left(\frac{-5}{2},\infty\right)\cap(-1,\infty)=\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

الاحتمال الثاني: $x+1<0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) = -x-1$

منها نحصل على $2x+|x+1|>-1$ بذلك نحصل على $2x-x-1>-1$ وهذا يؤدي إلي $x>0$.

مجموعة حلول هذا الاحتمال ستكون القيم المحققة للمتباينتين: $x>0$ و $x+1<0$

أي أن مجموعة الحل هي: $x\in(0,\infty)\cap(-\infty,-1)=\varphi$

وبالتالي مجموعة الحلول للمتباينة بشكل عام هي: $x\in\left(\frac{-2}{3},\infty\right)\cup\varphi=\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|\ 3x+4\ |\le 2$.

الحل:

من مبرهنة سابقة نجد $-2\le 3x+4\le 2$ ، بطرح العدد 4 نحصل على $-6\le 3x\le -2$ ، وبالقسمة على العدد3 نجد أن $-2\le x\le -\frac{2}{3}$ إذا فئة الحل هي $x\in[-2\ ,-\frac{1}{3}]$

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية $|\ x+2\ |\ge 8$.

الحل:

من مبرهنة سابقة نحصل على: $(x+2)\ge 8$ أو $(x+2)\le -8$ أي أن: $x\ge 6$ أو $x\le -10$ ، وفئة الحل هي: $\therefore\ \ x\in(-\infty\ ,-10]\cup[6\ ,\infty)$

مثال:

اوجد مجموعة الحل للمتباينة $\left|\frac{x+1}{x}\right|>\frac{10}{3}$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

من خواص القيمة المطلقة نجد: $\frac{x+1}{x} > \frac{10}{3}$ أو $\frac{x+1}{x} < -\frac{10}{3}$ بضرب المتباينتان بـــ x^2 (مقدار موجب) نجد: $x(x+1) > \frac{10}{3}x$ أو $x(x+1) < -\frac{10}{3}x$:

الاحتمال الأول:

$x^2 + x > \frac{10}{3}x$ أي أن $x^2 - \frac{7}{3}x > 0$ و منه $x(x-\frac{7}{3}) > 0$ نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	0	بينهما	$\frac{7}{3}$	بينهما	$+\infty$
$x\left(x-\frac{7}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن فئة الحل هي $(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{3},\infty\right)$

الاحتمال الثاني:

$x^2 + x < -\frac{10}{3}x$ أي أن $x^2 + \frac{13}{3}x < 0$ و منه $x\left(x+\frac{13}{3}\right) < 0$ نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	$-\frac{13}{3}$	بينهما	**0**	بينهما	$+\infty$
$x\left(x-\frac{7}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن فئة الحل هي $\left(\frac{-13}{3},0\right)$

والحل العام للمتباينة هو $(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{3},\infty\right)\cup\left(-\frac{13}{3},0\right)$

مثال:

أوجد حل المتباينة $0 < |3x+1| < \frac{1}{3}$.

الحل:

نجزئ المتباينة إلي متباينتين كالتالي: $|3x+1| < \frac{1}{3}$ و $0 < |3x+1|$

منها نحصل على المتباينات

$$-\frac{1}{3} < 3x+1 < \frac{1}{3} \qquad (3x+1)^2 > 0$$

$$-\frac{4}{9} < x < \frac{-2}{9} \quad \text{و} \quad x \in IR - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$$

بذلك الحل هو تقاطع الحلين $\left(\frac{-4}{9},\frac{-2}{9}\right)\cap\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

أي أن: $x\in\ (-\frac{4}{9}\ ,-\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{3}\ ,-\frac{2}{9})$

مثال:

أوجد حل المتباينة $\frac{3}{x-9}>\frac{2}{x+2}$.

الحل:

$\frac{3}{x-9}-\frac{2}{x+2}>0$ بتوحيد المقام نحصل على $\frac{3(x+2)-2(x-9)}{(x-9)(x+2)}>0$ وبالتالي:

$\frac{x+24}{(x-9)(x+2)}>0$: ندرسها كمتباينة كسرية

x	$-\infty$	بينهما	-24	بينهما	-2	بينهما	9	بينهما	∞
$x+24$		−	0	+	0	+	+	+	
$(x-9)(x+2)$		+	+	+	0	−	0	+	
$\frac{x+24}{(x-9)(x+2)}>0$		−	0	+	II	−	II	+	

$x\in(-24,-2)\cup(9,\infty)$

✍ أمثلة محلولة

1- عبر بطريقة القائمة عن المجموعات:

A={x:x (عدد طبيعي مكون من رقم واحد)}

B={x:x (عامل للعدد6)}

C={x: $x^2 - 25 = 0$ }

الحل:

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$B = \{1,2,3,6\}$$

$$C = \{5,-5\}$$

2- عبر بطريقة الوصف عن المجموعات التالية:

$A = \{2,4,6,8,..........\}$ ، $B = \{2,3,5,7\}$

$C = \{1,4,9,16,25.......\}$

الحل:

A={x:x (عدد طبيعي زوجي موجب)}

B={x:x(عدد أولي أصغر من 10)}

C={x: (مربع كامل) }

3- بين أي المجموعات الآتية متساوية وأيها متكافئة:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{x : x \leq 6, x \in N\}$

$C = \{a,b,c,d,e\}$ $D = \{2,4,6\}$

$E = \{-4,2\}$ $F = \{x : x^2 + 2x - 8 = 0\}$

الحل:

لاحظ أن: $A = B$ و $D \equiv E$ و $F = E$.

4- أوجد المجموعات الجزئية لكل من المجموعات التالية:

$A=\{2,4,6\}\ ,\ B=\{1,2,3,4\}$

الحل:

$S(A)=2^3=8$ ومنها

$S(A)=\{\{\ \},\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}\}$

$S(B)=2^4=16$ ومنها $S(B)=\left\{\begin{matrix}\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\\ \{3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\end{matrix}\right\}$

5- إذا كانت $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A=\{3,5,8\}$ و $B=\{2,5,7,8\}$ و $C=\{3,5,7,9,10\}$

فأوجد كلا من: $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $A-B$ ، $(A\cup B)\cup C$ ، $A\cap C$ ، $A\cap(B\cup C)$ ، A^c,B^c,C^c ، $A\cap(B\cup C)$.

الحل:

$A\cap B=\{5,8\}\ ,\ A\cup B=\{2,3,5,7,8\}, A-B=\{3\},$

$(A\cup B)\cup C=\{2,3,5,7,8,9,10\},\ A\cap C=\{3,5,\}\ ,\ A\cap(B\cup C)=\{3,5,8\},\ ,$

$A^c=\{1,2,4,6,7,9,10\}\ \ A\cap(B\cap C)=\{5\}, C^c=\{1,2,4,6,8\}\ ,\ B^c=\{1,3,4,6,9,10\}$

6- أكتب جدول الانتماء اللازم لإثبات قانوني دومورجان.

الحل:

نعلم بأن نص قانوني دومورجان هو:

1) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

A	A'	B	B'	$A\cap B$	$(A\cap B)'$	$A'\cup B'$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ (2

A	A'	B	B'	$A\cup B$	$(A\cup B)'$	$A'\cap B'$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

بمقارنة العمود الرابع والخامس في الجدولين السابقين نلاحظ تطابقهما مما يثبت قانوني ذومورجان.

7- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (1،4) والعمودي على المستقيم الذي معادلته $2x-6y=5$.

الحل:

بما أن المستقيمين متعامدين فإن $m_1 \times m_2 = -1$

و المعادلة العامة للمستقيم $y = mx + b$ ، ومنها

$$\therefore \quad 2x-6y=5$$

$$2x-5=6y$$

بقسمة الطرفين على العدد 6: $\frac{2}{6}x-\frac{5}{6}=y$

$$m_1=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times m_2=-1 \Rightarrow m_2=-3$$

وبالتالي:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

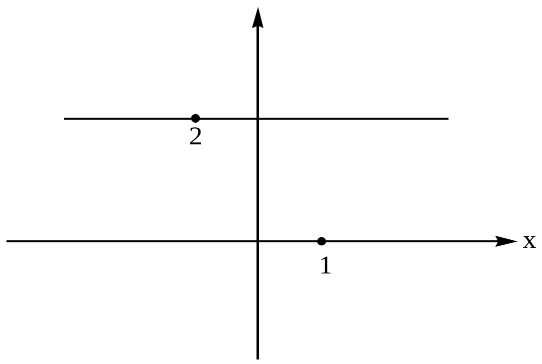
$$y-1=-3(x-4)$$

ومنها $y+3x=13$

8- أوجد معادلة المستقيم العمودي على المحور y ويمر بالنقطة (2 , 1).

الحل:

بما أنَّ المستقيم عمودي على المحور y فإن معادلته خالية من المتغير x، وستكون في المتغير y فقط وبما أن المستقيم يمر بالنقطة (1، 2) فإن معادلته هي: $y = 2$



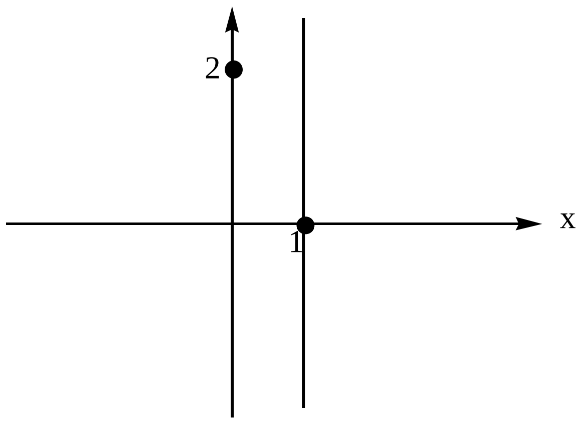
9- اوجد معادلة المستقيم الموازى للمحور y ويمر بالنقطة (2 , 1).

الحل:

بما أن المستقيم موازى للمحور y، إذا فهو عمودي على المحور x

إذا المعادلة عبارة عن (عدد = x)، وهى خالية من المتغير y.

و $x = 1$ هي المعادلة المطلوبة لأنه يمر بالنقطة (2 , 1)



10- أوجد قيمة k في المعادلتين علما بان المستقيمين متعامدين $kx + 5y = 2k$ و $2x - 3y = 1$.

الحل:

وبقسمة طرفي معادلة المستقيم الأول على 5 $5y = -kx + 2k$

$$y = -\frac{k}{5}x + \frac{2}{5}k$$

$$m_1 = -\frac{k}{5} \text{ منها } y = 2x - 1$$

وبقسمة الطرفين على 3، نجد $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ ، هذا يؤدي إلي أن الميل يساوي $m_2 = \frac{2}{3}$

بما أن المستقيمين متعامدين إذا $m_1 m_2 = -1$ ومنها $\frac{k}{5} \times \frac{2}{3} = -1$

إذا قيمة k هي: $k = \frac{15}{2} = 7.5$

11- أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $y = x+1$ ويقطع جزءًا من محور الصادات قدره 2.

الحل:

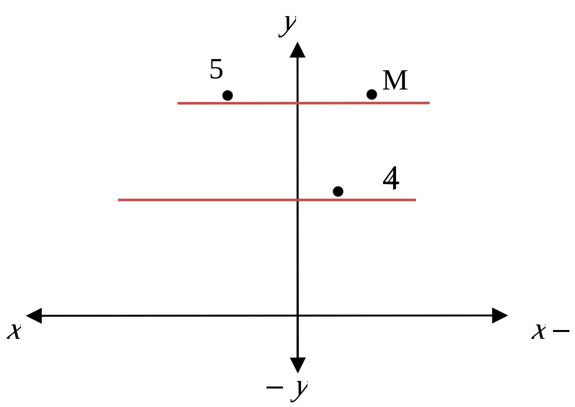
من المعادلة العامة للمستقيمات $y = mx + b$ نجد أن $m_1 = 1 = m_2$ ومن خلال الجزء المقطوع من y نجد أن $b_2 = 2$ وهذا يؤدي إلى $y = mx_2 + b_2$

أي أن المعادلة المطلوبة هي $y = x + 2$

12- أوجد معادلة المستقيم الموازى للمستقيم $y = 4$ ، ويمر بالنقطة $(2\ ,\ 5)$.

الحل:

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل $y = C$ وبما أنه يمر من النقطة $M(2\ ,5)$ نجد أن $y = 5$



13- حدد قيمة k التي تجعل النقاط $A(7\ ,\ 5)$, $B(-1\ ,\ 2)$ ، $(k\ ,\ 0)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية في B.

الحل:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-5}{-1-7}=\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}$$

$$m_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{k+1}=\frac{-2}{K+1}$$

$m_{BC}m_{AB}=-1$ وهذا يودي إلي $\frac{3}{8}\times\frac{-2}{k+1}=-1$ منها $\frac{-6}{8k+8}=-1$

$-8k=2$ واضح أن $k=-4$

14- ليكن لدينا $C(2,-5)$ ، $B(3,6)$ ، $A(4,-3)$ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة A ، ويوازي المستقيم المار بالنقطة $B\ ,\ C$.

الحل:

$$m_{BC}=\frac{-5-6}{2-3}=\frac{-11}{-1}=11$$

$$(y-y_1)=m(x-x_1)$$

$$y-3=11(x+4)$$

$$y-11x-41=0$$

15- أوجد معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $(3,0)$.

الحل:

معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي $x=x_1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $x=3$ لأنه يمر بالنقطة $(3,0)$.

16- أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم: $x+2y-15=0$ ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين $2x-y=5\ ,\ x+y=4$.

الحل:

أولاً: نوجد ميل معادلة المستقيم المعطى $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

وهو نفسه ميل المستقيم المطلوب $m_1 = -\frac{1}{2} = m_2$

نحل المعادلتين $2x - y = 5$; $x + y = 4$ لإيجاد النقطة التي يمر بها المستقيم المطلوب

$x = 4 - y$ منها $2(4 - y) - y = 5$ بذلك يكون لدينا $8 - 2y - y = 5$

$y = 1 \rightarrow \quad x = 3$

لدينا الميل = $-\frac{1}{2}$ والنقطة $(3 , 1)$ التي يمر منها المستقيم المطلوب فمعادلته هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

ومنها المعادلة العامة تصبح على الشكل التالي $y + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0$

17- عينّ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$, $(4, 7)$ وما هي الزاوية التي يصنعها مع محور x.

الحل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{4 - 2_1}(x - 2)$$

$$y - 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 1$$

بذلك الميل يساوي $m = 2$ الزاوية التي يصنعها مع المحور x هي: $m = \tan\theta$ بذلك نحصل على قيمة الزاوية $\theta = \tan^{-1}(2) = 63.43^o$

18- عينّ معادلة المستقيم الذي ميلة $m = -7$ تقطع المحور y في النقطة $b = 5$.

الحل:

الصورة العامة للمستقيم هي $y = mx + b$ بالتعويض نحصل على $y = -7x + 5$

19- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4,-4)$، ويكون عموديا على المستقيم $2x-5y+3=0$.

الحل:

من المعادلة $y = mx + b$ نحصل على

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{5}$$

$$m_1 \, . \, m_2 = -1$$

$$\frac{2}{5}\; m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{5}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$y + 4 = -\frac{5}{2}(x-4)$ منها نحصل على $y + \frac{5}{2}x - 6 = 0$

20- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3\ ,\ 2-)$ ويكون موازيا للمستقيم $3x-2y=-1$.

الحل:

من معادلة المستقيم $2y = 3x + 1$

وبالقسمة على 2 نحصل على $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$$y = mx + b \;\rightarrow\; m_1 = \frac{3}{2} = m_2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x+2)$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}x + \frac{6}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$$

21- أوجد معادلة المستقيم الذي ميله 4 ويقطع محور الصادات بمقدار 3.

الحل:

من معادلة خط المستقيم نعلم بأن $y = mx + b$ بالتعويض عن الميل والجزء المقطوع من محور الصادات نحصل المعادلة التالية:

$$y = 4x + 3$$

22- برهن أن المستقيمان اللذان معادلتهما $\frac{1}{3}y-x-2=0$, $6x-2y=3$ متوازيان.

الحل:

أ- نوجد ميل المستقيم الأول من المعادلة $6x-2y=3$:

$$6x-2y=3 \rightarrow \quad 2y=6x-3$$

$$y=3x-\frac{3}{2}$$

$$\therefore m_1=3$$

ب- نوجد ميل المستقيم الثاني من المعادلة $\frac{1}{3}y-x-2=0$:

$$\frac{1}{3}y-x-2=0 \rightarrow \quad |\frac{1}{3}y=x+2$$

$$y=3x+6$$

$$\therefore m_2=3$$

$\therefore$ $m_1=m_2$ إذا المستقيمان متوازيان .

23- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر من نقطة منتصف المسافة بين النقطتين $(1,3)$ ، $(-1,5)$ ويكون عموديا على المستقيم المار خلال النقطتين $(-2\ ,1)$, $(0\ ,0)$.

الحل:

نوجد نقطة منتصف المسافة $(\frac{-1+1}{2}\ ,\ \frac{5+3}{2})=(0\ ,\ 4)$ هذه النقطة يمر بها المستقيم، المطلوب إيجاد معادلته الآن، نوجد ميل المستقيم المطلوب إيجاد معادلته m_1 من أجل ذلك، نوجد ميل المستقيم الثاني، وذلك عن طريق إيجاد ميل المستقيم العمودي عليه أولاً: (m_2).

ميل المستقيم العمودي على المستقيم المراد إيجاد معادلته:

$$m_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$$

$$m_1\ .\ m_2=-1 \rightarrow m_1=2$$

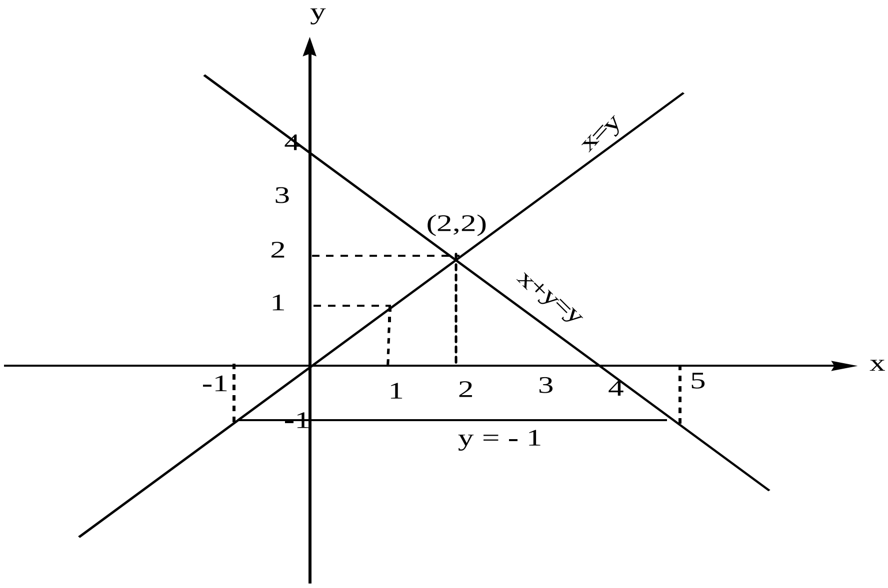
إذا لدينا ميل المستقيم $m_1=2$ والنقطة التي يمر بها $(0\ ,\ 4)$ وبالتالي:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-4=2(x-0)$$

$$y=2x+4$$

24- أوجد معادلة المستقيم العمودي على المحور y، ويقع تحت نقطة تقاطع المستقيمين $x+y=4$, $x=y$ ويصنع مثلث مساحته (9) وحدات مربعة مع المستقيمين المطلوبين.

الحل:



نوجد نقطة تقاطع المستقيين $x=y$، و$x+y=4$ من أجل ذلك نحل المعادلتين حلاً مشتركاً فنجد $x+y=4$ من $x=2$ نعوض في إحدى المعادلتين فنجد $y=2$ وبالتالي نقطة التقاطع $(2,2)$.

أن معادلة المستقيم المطلوب والعمودي على المحور y من الشكل $y=a$ نحدد الثابت a بحيث تكون مساحة المثلث الحاصل تساوى 9 بما أن المثلث يقع تحت النقطة $(2,2)$ فإن $a<2$. وبما أن المستقيمان $x=y$ و $x+y=4$ متعامدان حاصل ضرب ميلهما $m_1=1$ و $m_2=-1$ هو $m_1m_2=-1$ فإن المثلث قائم الزاوية في النقطة $(2,2)$ مساحته تساوي حاصل ضرب الضلعين القائمين لدينا $A(2,2)$و $B(4-a,a)$ و $C(a,a)$ وبالتالي:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=9\Rightarrow\overline{AB}\times\overline{AC}=18$$

$$\sqrt{(2-a)^2+(a-2)^2}\times\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=18$$

$$(a-2)^2 = (2-a)^2$$

$$2(a-2)^2 = 18$$

$$(a-2)^2 = 9$$

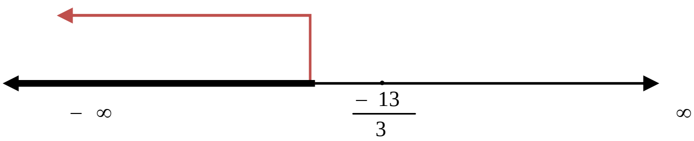
منها نوجد قيمة $a-2=-3$ أو $a-2=3$ بذلك قيمة a هي $a=-1$ أو $a=5$

وبما أن $a<2$ فإن الحل المقبول هو $a=-1$ إذا المستقيم المطلوب هو $y=-1$

25- حل المتباينة $3x+5 \le -8$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

واضح أن المتباينة تأخذ الشكل التالي $3x \le -13$ و بقسمة الطرفين على 3 نحصل على $x \le \frac{-13}{3}$ و منها فئة الحل هي: $\left(-\infty, \frac{-13}{3}\right]$ وتمثل على خط الأعداد كالتالي:



26- حل المتباينة $x^2 > x^3$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

$$x^2 - x^3 > 0 \rightarrow x^2(1-x) > 0$$

بما أن $x^2 > 0$ عندما $x \neq 0$ هذا يؤدي إلى

$1-x>o \rightarrow 1>x$ و $x \neq 0$

إذا فئة الحل هي $x \in (-\infty\ ,\ o) \cup (0\ ,\ 1)$



27- أوجد حل المتباينة $\frac{1}{x^2} < 100$.

الحل:

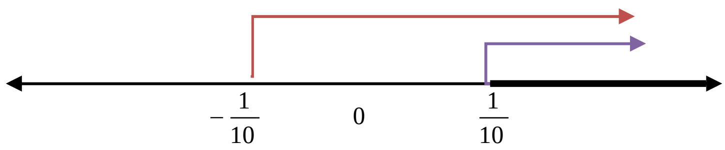
نحصل على بضرب المتباينة في x^2

$$1 < 100x^2 \rightarrow 100x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow 0 < (10x-1)(10x+1)$$

إما المقدران موجبان معاً، أو المقدران سالبان معاً :

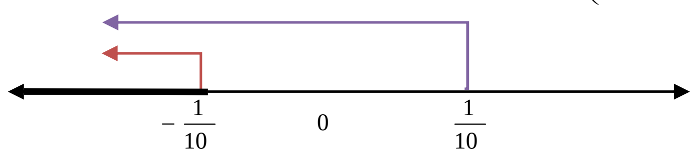
الاحتمال الأول: أن يكون لدينا $10x+1>0$ و $10x-1>0$ هذا يؤدي إلى $x > \frac{-1}{10}$ و $x > \frac{1}{10}$

بذلك فئة الحل هي: $\left(\frac{1}{10}, \infty\right)$.



الاحتمال الثاني: أن يكون $10x+1<0$ و $10x-1<0$ هذا يؤدي إلى $x < \frac{-1}{10}$ و $x < \frac{1}{10}$

بذلك فئة الحل هي: $\left(-\infty, \frac{-1}{10}\right)$.



بذلك تكون فئة الحل هي: $x \in (-\infty \ , -\frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{10} \ , \infty)$

28- أوجد حل المتباينة: $x^3 - 5x^2 - 6x > 0$.

الحل:

نأخذ المعادلة $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ ونحللها إلى الشكل $x(x-2)(x-3) = 0$ ، وبذلك يكون للمعادلة ثلاثة جذور وهي $x = 0$ أو $(x-3) = 0$ أو $(x-2) = 0$ منها $x = 0$ أو $x = 3$ أو $x = 2$

وبالتالي نكون الجدول:

x	$-\infty$	بينهما	**0**	بينهما	**2**	بينهما	**3**	بينهما	∞
$(x-2)(x-3)$		+	+	+	0	−	0	+	
$x(x-2)(x-3)$		−	0	+	0	−	0	+	

وبالتالي مجال الحل المقبول هو $x \in (0,2) \cup (3, \infty)$

29- أوجد حل المتباينة $\frac{x+1}{x-1} \le x^2 + x - 1$.

الحل:

المتباينة السابقة تصبح على الشكل التالي: $\frac{x+1}{x-1} - x^2 - x + 1 \le 0$

منها نحصل على: $\frac{x+1-x^3-x^2+x+x^2+x-1}{x-1} \le 0$ بذلك نحصل على $\frac{-x^3+3x}{x-1} \le 0$ وبالتالي يكون $\frac{x(3-x^2)}{x-1} \le 0$ منها نكون الجدول:

x	$-\infty$	بينهما	$-\sqrt{3}$	بينهما	**0**	بينهما	1	بينهما	$\sqrt{3}$	بينهما	∞
$3-x^2$		−	0	+	+	+	+	+	0	−	
$x-1$		−	−	−	−	−	0	+	+	+	
$x(3-x^2)$		+	0	−	0	+	+	+	0	−	
$\frac{-x^3+3x}{x-1}$		−	0	+	0	−	II	+	0	−	

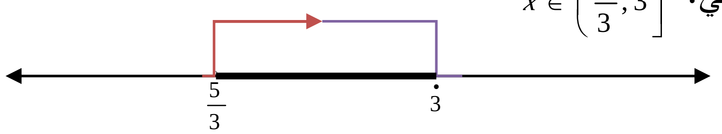
بذلك فئة الحل هي: $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup (0,1) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

30- أوجد حل المتباينة $\frac{2x-3}{3x-5} \ge 3$.

الحل: المتباينة تأخذ الشكل التالي $\frac{2x-3}{3x-5} - 3 \ge 0$ منها $\frac{2x-3-3(3x-5)}{3x-5} \ge 0$ بذلك نحصل على: $\frac{-4x+12}{3x-5} \ge 0$ وهذا يؤدي إلى $\frac{x-3}{3x-5} \le 0$ ونكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	$\frac{5}{3}$	بينهما	**3**	بينهما	∞
$x-3$		-	−	-	0	+	
$3x-5$		-	0	+	+	+	
$\frac{x-3}{3x-5}$		+	II	−	0	+	

منها فئة الحل هي: $x \in \left(\frac{5}{3}, 3\right]$



31- أوجد حل المتباينة $-3<\dfrac{7-2x}{3}\leq 4$.

الحل: بضرب طرفي المتباينة في 3، فنحصل على $-9<7-2x\leq 12$، نضيف المقدار -7 إلى طرفي المتباينة، نحصل على $-16<-2x\leq 5$ بقسمة المتباينة على -2 نحصل على $8>x\geq\dfrac{-5}{2}$، وهكذا يكون مجال الحل هو $\left[\dfrac{-5}{2},\infty\right)$.

32- أوجد حل المتباينة $11<x^2+6x+4<20$.

الحل:

$$x^2+6x+4<20 \quad , \quad 11<x^2+6x+4$$
$$x^2+6x-16<0 \quad , \quad 0<x^2+6x-7$$
$$(x-2)(x+8)<0 \quad , \quad 0<(x+7)(x-1)$$

بذلك يكون الحل على الشكل التالي: $x\in(-8,2)$ و كذلك $x\in(-\infty,-7)\cup(1,\infty)$

و الحل العام للمتباينة هو تقاطع فئات الحلول كالتالي: $x\in[(-\infty,-7)\cup(1,\infty)]\cap(-8,2)$

بذلك يكون الحل: $x\in[(-\infty,-7)\cap(-8,2)]\cup[(1,\infty)\cap(-8,2)]$

منها نحصل على: $x\in(-8,-7)\cup(1,2)$

33- أوجد حل المتباينة $2x^2+9x+4\geq 0$.

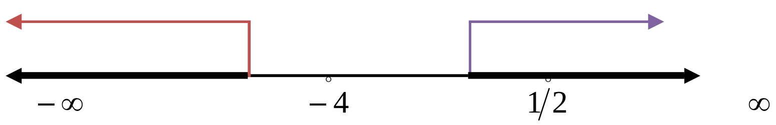
الحل:

نحل المعادلة التالية: $(2x+1)\ (x+4)=0$ بذلك يكون حل المعادلة على الشكل التالي:

$(2x+1)=0$ أو $(x+4)=0$

منها نحصل على $x=\dfrac{-1}{2}$ أو $x=-4$ بذلك نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	**-4**	بينهما	$\frac{-1}{2}$	بينهما	∞
$(2x-1)(x+4)$		+	0	−	0	+	



إذا فئة الحل هي: $(-8,-4)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)$

34- أوجد حل المتباينة $3x^2-2x-6<2x^2-6x-1$.

الحل:

بنقل الطرف الثاني للطرف الأول على المتباينة $x^2+4x-5<0$ منها نحصل على المعادلة $x^2+4x-5=0$ بذلك يكون لدينا $(x+5)(x-1)=0$ منها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	**−5**	بينهما	**1**	بينهما	∞
$(x+5)(x-1)$		+	0	−	0	+	

وفئة الحل هي $x\in(-5\,,1)$

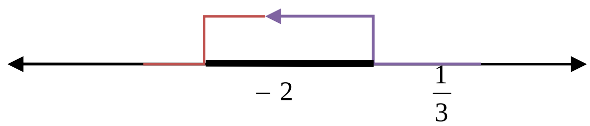
35- أوجد حل المتباينة $3x^2+5x-2<0$ موضحاً الحل على خط الأعداد .

الحل:

واضح أن حل المتباينة $3x^2+5x-2<0$ تأخذ الشكل التالي: $(3x-1)(x+2)<0$ منها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	$\frac{-1}{2}$	بينهما	∞
$(3x-1)(x+2)$		+	0	−	0	+	

إذا فئة الحل هي $x\in(-2,\frac{1}{3})$



36- أوجد حل المتباينة $\frac{1+|x|}{1-|x|}\geq 0$.

الحل:

حسب نظرية القيمة المطلقة نعلم بأن: $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ ومنها يكون لدينا

$\frac{1+|x|}{1-|x|}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1-x}\geq 0 & if \quad x\geq 0 \\ \frac{1-x}{1+x}\geq 0 & if \quad x<0 \end{cases}$ بذلك يكون لدينا احتمالين:

الاحتمال الأول:

في حالة ما نأخذ المقدار $x\geq 0$ يكون $\frac{1+x}{1-x}\geq 0$ ومنه نكون الجدول التالي:

x	0	بينهما	1	بينهما	∞
$1+x$		+	+	+	
$1-x$		+	0	−	
$\frac{1+x}{1-x}$		+	II	-	

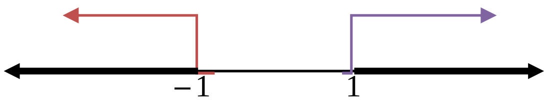
إذا فئة الحل هي: $x \in [0,1)$

الاحتمال الثاني:

في حالة ما نأخذ المقدار $x<0$ يكون $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ منه نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-1	بينهما	0
$1-x$		+	+	+	
$1+x$		+	0	−	
$\frac{1-x}{1+x}$		+	II	−	

إذا فئة الحل هي: $x \in (-\infty,-1)$



37- أوجد حل المتباينة $|x-7| \leq 5$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

من نظرية سابقة نجد $|x-7| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-7 \leq 5$ منها نحصل على $2 \leq x \leq 12$ منها تكون فئة الحل هي $x \in [2,12]$



38- أوجد حل المتباينة $|x-4| = 6$.

الحل:

واضح أن المقدار $|x-4| = 6$ يتكون من $x-4 = 6$ أو $x-4 = -6$ منها نحصل على $x = -2$ أو $x = 10$ بذلك تكون مجموعة الحل هي $x \in \{-2,10\}$

39- حل المتباينة $|3x+4| > 2$.

الحل:

واضح أن المقدار $|3x+4| > 2$ يتكون من $3x+4 > 2$ أو $3x+4 < -2$ منها نحصل على $3x > -2$ أو $3x < -6$ بذلك تكون قيمة المتغير x أما $x < -2$ أو $x > \frac{-2}{3}$ منها فئة الحل هي $x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

40- حل المتباينة $|x^2-4| \geq 5$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل

واضح أن المقدار $|x^2-4| \geq 5$ يتكون من $x^2-4 \geq 5$ أو $x^2-4 < -5$ منها نحصل على $x^2 \geq 9$ أو $x^2 \leq -1$ ولكن $x^2 \leq -1$ مستحيلة إذا مجال حلها هو φ بقي المقدار $x^2 \geq 9$ وبالتالي تكون قيمة المتغير x أما $x \geq 3$ أو $x \leq -3$ منها فئة الحل هي $x \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$



41- حل المتباينة $|2x+1| < |3x-2|$.

الحل:

بتربيع الطرفين وحيث أنهما موجبان نحصل على $(2x+1)^2 < (3x-2)^2$ منها يكون لدينا $9x^2-12x+4 < 4x^2+4x+1$ بذلك نحصل على

$5x^2-16x+3<0 \Rightarrow (5x-1)(x-3)<0$ ومنها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	$\frac{1}{5}$	بينهما	3	بيتهما	∞
$5x-1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(5x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذا فئة الحل هي $x \in \left(\frac{1}{5},3\right)$

42- حل المتباينة $|x-5|=|3x-1|$.

الحل:

بتربيع الطرفين نحصل على $(x-5)^2=(3x-1)^2$ منها يكون لدينا: $x^2-10x+25=9x^2-6x+1$

بذلك نحصل على $8x^2+4x-24=0 \Rightarrow (2x-3)(x+2)=0$ نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	$\frac{3}{2}$	بينهما	∞
$(2x-3)(x+2)$		$+$	0	-	0	$+$	

بذلك تكون فئة الحل هي $x \in \left\{-2,\frac{3}{2}\right\}$

43- حل المتباينة $|2x+1| \le x+2$.

الحل:

يكون لهذه المتباينة حل إذا كان $x+2$ غير سالب، أي إذا كان $x \ge -2$ وعندها يكون $x \ge -2$ و $(2x+1)^2 \le (x+2)^2$ بذلك يكون لدينا $x \ge -2$ و $4x^2+4x+1 \le x^2+4x+4$ منها نحصل على $3x^2-3 \le 0$ بذلك نجد $x \ge -2$ و $x^2 \le 1$ هذا يؤدي إلى $x \ge -2,\ -1 \le x \le 1$

بذلك تكون فئة الحل هي: $x \in (-2,\infty) \cap [-1,1] = [-1,1]$.

44- أوجد حل المتباينة $2x+|x+1|>-1$.

الحل: حسب نظرية القيمة المطلقة نعلم بأن $|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ ومنها يكون

لدينا $|x+1| = \begin{cases} x+1 & if \quad x+1 \ge 0 \\ -x-1 & if \quad x+1<0 \end{cases}$ بذلك يكون لدينا احتمالين:

الاحتمال الأول:

في حالة ما نأخذ المقدار $x \geq -1$, $3x > -2$:أي أن $x \geq -1$, $3x+1 > -1$

إذا فئة الحل تتكون من $x \in \left(\frac{-2}{3}, \infty\right) \cap (-1, \infty) = \left(\frac{-2}{3}, \infty\right)$

الاحتمال الثاني:

ما المقدار $x < -1$, $2x - x - 1 > -1$ منها نحصل على :

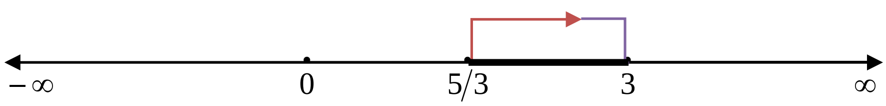
$x < -1$, $x - 1 > -1$ أو $x < -1$, $x > 0$ وهي مجموعة خالية

وبالتالي تبقى مجموعة الاحتمال الأول $x \in \left(\frac{-2}{3}, \infty\right)$ وهي الحل العام للمتباينة.

45- أوجد حل المتباينة $\left|\frac{7-3x}{2}\right| \leq 1$.

الحل:

من خواص القيمة المطلقة $-1 \leq \frac{7-3x}{2} \leq 1$ وبضرب المعادلة في 2 نحصل على $-2 \leq 7 - 3x \leq 2$ وبإضافة العدد7- إلى طرفي المعادلة $-9 \leq -3x \leq -5$ منها نحصل على $\frac{5}{3} + \geq x \geq 3$ إذا **مجموعة الحل هي:** $x \in [\frac{5}{3}, 3]$



Summary

- A set is a well-defined collection of objects called the elements or members of the set.
- Sets will usually be denoted by capital letters and elements are designated by lower – case letters.
- we use the special notation $x \in A$ to mean that x is an element of A or x belongs to A.
- A set A is called a subset of a set B, in symbols $A \subseteq B$, if every element of A is also a member of B.
- The set without any element is called the empty set and is denoted by φ .
- The union of sets A and B denoted by:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

  It is the set of all elements which belong to at least one of the sets A or B .
- The intersection of sets A and B, denoted by:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

  is the set of those elements common to both A and B .
- The difference:

$$A - B = \{x : x \in A \quad and \quad x \in B\}$$

  is the set of all elements of A which are not in B
- The closed interval $[A, B]$ is the set of real numbers between a and b that is

$$[A, B] = \{x \in R \quad , \quad a \le x \le b\}$$

- The open interval $]A, B[$ or (A, B) is the set of real numbers between a and b that is:

$$(A, B) = \{x \in R \quad , \quad a < x < b\}$$

- The half open (or half closed) interval $[A, B)$ is the set of real numbers between a and b, including the number a, that is:

$$[A, B) = \{x \in R \quad , \quad a \le x < b\}$$

- In same form we write: $(A, B] = \{x \in R \quad , \quad a < x \le b\}$
- Natural numbers: set of numbers denoted by N, where

$$N = \{1,2,3,4,5,......... \ .\}$$

  and is called also the positive integer
- Integer number: is denoted by Z ,where

$$z = \{0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5, ... \ .\}$$

- Rational number: is denoted by Z ,where

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : \quad a, b \in Z \qquad , b \neq 0 \right\}$$

- Irrational numbers: Any number that is not rational number is called irrational number.
- Real numbers: denoted by R , is the set that includes the rational and irrational numbers.

Distance between two points $p_1(x_1, y_1)$ and $p_2(x_2, y_2)$ denoted by $d(p_1 p_2)$ is: $d(p_1 p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

A linear equation in two variables is an equation of the form: $Ax + By = C$

Where A and B are not both zero. The points at which the graph of a linear equation crosses the axes are called intercepts. The x-intercept is the points at which the graph crosses the x-axis; The y-intercept is the points at which the graph crosses the y-axis;
Steps for finding the intercepts of a linear equation:

Step 1: Let $y = 0$ and solve for x. This determines the x-intercept of the line.

Step 2: Let $x = 0$ and solve for y. This determines the x-intercept of the line. A vertical line is given by an equation of the form $x = a$, where (a, o) is the x-intercept.

Slope of a line:

Let $p(x_1, y_1)$ and $q(x_2, y_2)$ be two distinct points. If $x_1 \neq x_2$, the slope m of the non-vertical line L containing P and Q is defined by the formula:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$ I f $x_1 = x_2$, L is a vertical line and the slope of y with respect to x. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ average rate of change of y with respect to x.

Point-slope form of an equation of a line:

An equation of a non-vertical line with slope m that contains the point (x_1, y_1) is: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Equation of a horizontal line:

A horizontal line is given by an equation of the form y=b, where $(0, b)$ is the y-intercept.

Slope-Intercept form of an equation line:

An equation of a line L with slope m and y-intercept $(0, b)$ is : $y = mx + b$

- Let a and b are two real numbers and $a < b$. We shall use the notation $a < x < b$ to mean that x is a number between a and b .The expression $a < x < b$ is equivalent to the two in equivalents $a < x$ and $x < b$ .Similarly ,

The expression $a \le x \le b$ is equivalent to the two in equivalents $a \le x$ and $x \le b$. The remaining two possibilities, $a \le x < b$ and $a < x \le b$, are defined similarly.

Let a and b represent two real number with $a < b$:A closed interval denote− . by $[a, b]$, consists of all real numbers x for which $a \le x \le b$

An open interval ,denoted by (a, b) ,consists of all real numbers x for . which $a < x < b$

The half – open ,or half –closed , intervals are $(a, b]$, consisting of all real numbers x for which $a < x \le b$,and $[a, b)$, consisting of all real .numbers x for which $a \le x < b$

****

تمارين على الفصل الأول

1: في التمارين(1−8) اذكر خواص الفترات، وحدد أين توجد في المستوى الكارتيزي, حددها على خط الأعداد:☜

1: $[-3\ ,\ 2]$, 2: $(-8\ ,\ -1)$, 3: $(\frac{1}{5}\ ,\ -\frac{1}{2})$, 4: $(\frac{1}{9}\ ,\ \frac{7}{3})$

5: $[\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4})$, 6: $(-\frac{1}{5}\ ,\ \infty)$, 7: $(-\infty\ ,\ 0]$, 8: $(-\frac{6}{5}\ ,\ \frac{3}{5}]$

في التمارين من 9−12 أوجد المسافة بين النقطتين وأكتب معادلة المستقيم المار بهما.

9: $(-4\ ,\ -7)$, $(-9\ ,\ -10)$

10: $(0\ ,\ 15)$, $(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3})$

11: $(-3\ ,\ 2)$, $(-8\ ,\ 4)$

12: $(0\ ,\ -2)$, $(10\ ,\ 13)$.

13: أثبت باستخدام جدول الانتماء العلاقات التالية:☜

$a)\ \ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$b)\ \ (A\cup B)=(B\cup A)$

$c)\ \ (A\cap A)=A$

$d)\ \ (A-B)=(A\cap B')$

$e)\ \ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

14: أوجد أطوال أضلاع المثلث الذي إحداثيات رؤوسه☜

$P_1(1\ ,\ 2)\quad ,\quad P_2(-3\ ,\ 4)\quad ,\quad P_3(7\ ,\ 6)$.

15: أوجد كل قيم x، بحيث تكون المسافة بين $(-4, 6)$, (x, x) مساوية $L\ <\ 10$ وحدات.

16: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2\ ,\ 3)$، ويكون عموديا على المحور x.

17: أوجد معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة $(2\ ,\ 1)$.

18: أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي يمر خلال النقطتين $(1\ 2-)$, $(0\ ,\ 0)$، ويمر خلال منتصف النقطة الواصلة بين النقطتين $(3\ ,\ 1)$, $(5\ ,\ 1-)$.

19: إذا كانت المسافة بين النقطة $P_1(5\ ,-2)$ و النقطة $p_2(x,1)$ هي 5 وحدات أوجد هذه النقطة.

20: اثبت أن المثلث ABC حيث $A(1\ ,\ 0)\ ,\ B(5\ ,\ 4)\ ,\ C(-2\ ,3)$ مثلث قائم الزاوية.

21: أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية، ومثل ذلك بيانياً على خط الأعداد الحقيقي:

$a)\ \dfrac{2x}{x2+5}<0 \quad b)\ (x+3)(x-4)\geq 0 \quad c)\ 7x-8<4x+7$

$d)|2x-3|<|x+2| \quad e)\ 6>3(-x+5)-9\geq 0 \quad f)\ 3x^2-2x-6<2x^2-6x$

$g)\ |x^2-27|=8 \quad h)\ |2x-3|<|x+2| \quad i)\ 6>3(-x+5)-9\geq 0$

$k)\ \left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|<4 \quad j)\ 4-x\geq|5x-2| \quad m)\ 6>3(-x+5)-9\geq 0$

$n)-1<\dfrac{3-7x}{4}\leq 6 \quad o)4-x\geq|5x+1| \quad p)2\dfrac{3x+2}{2x-7}\leq 0$

22: حل المتباينات والمعادلات التالية:☜

$c)\ |2x+1|\leq 2 \quad b)\ |2x-7|=3 \quad a)\ |3x-5|>2$

$f)\ |2x+3|=|x-4| \quad e)\ |x|-|2x+1|\geq 0 \quad d)\ |x^2+5x|\geq 6$

$i)\ |3x+4|>x^2+x+2 \quad h)\ |x+3|=2x+1 \quad g)\ \left|\dfrac{2x-5}{x-6}\right|\leq 3$

****

العلاقات والدوال Relations and functions

تعريف الضرب (الجداء) الكارتيزي (الديكارتي) Cartesian product

لنفرض أن A, B مجموعتان ، تسمى المجموعة غير الخالية التي تتكون من الأزواج المرتبة (x, y) حيث $x \in A \ , y \in B$ بالضرب الكارتيزي (الديكارتي) للمجموعتين A, B ويكتب $A \times B$ بحيث $A \times B = \{ (x, y) \ : x \in A \ , \ y \in B \}$.

> ## تعريف العلاقة الثنائية:
> لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين، نسمي علاقة R من A إلى B أي مجموعة جزئية من $A \times B$ وتكتب $a R b$ أو $(a, b) \in R$ وتقرأ a مرتبطة بالعلاقة R مع b .

1-النطاق: Domain

لتكن B, A مجموعتين غير خاليتين عندها نعرف نطاق العلاقة R من A إلى B على أنه مجموعة جميع الإحداثيات الأولى من الثنائيات المرتبة حيث:

$$Dom(R) \subseteq A \quad , \quad Dom(R) = \{x \in A \quad : (x, y) \in R\}$$

2-المدى: Range

لتكن B, A مجموعتين غير خاليتين عندها نعرف مدى العلاقة R من A إلى B على أنه مجموعة جميع العناصر الثانية من الثنائيات المرتبة حيث :

$$Rang(R) \subseteq B \quad , \quad Rang(R) = \{y \in B \quad : (x, y) \in R\}$$

> ## تعريف العلاقة العكسية: Inverse relation
> لتكن $A \ , \ B$ مجموعتين غير خاليتين وإذا كانت R علاقة من A إلى B ، فإن معكوس العلاقة R هي علاقة R^{-1} من B إلى A ، حيث إن $b R^{-1} a$ إذا وفقط إذا $a R b$ أي أن: $R^{-1} = \{(y, x) \quad : \quad (x, y) \in R\}$

مثال :

إذا كانت $A=\{2,4,6,8,10\}$ و $B=\{k,m,n\}$ فأوجد $A\times B$ و $B\times A$ ،ونطاق ومدى العلاقة $A\times B$:

الحل :

$$A\times B=\left\{\begin{matrix}(2,k),(2,m),(2,n),(4,k),(4,m),(4,n),(6,k),(6,m),\\(6,n),(8,k),(8,m),(8,n),(10,k),(10,m),(10,n)\end{matrix}\right\}$$

$$B\times A=\left\{\begin{matrix}(k,2),(k,4),(k,6),(k,8),(k,10),(m,2),(m,4),\\(m,8),(m,10),(n,2),(n,4),(n,6),(n,8),(n,10)\end{matrix}\right\}$$

نطاق العلاقة $A\times B$ هو $D=\{2,4,6,8,10\}$

مدى العلاقة $A\times B$ هو $Range=\{k,m,n\}$

مثال :

إذا كانت $R=\{(0,1),(3,1),(4,2),(7,3),(7,5)\}$ فأوجد R^{-1} ونطاقها ومدها:

الحل : $R^{-1}=\{(1,0),(1,3),(2,4),(3,7),(5,7)\}$

نطاق العلاقة R^{-1} هو $D=\{1,2,3,5\}$

مدى العلاقة R^{-1} هو $Range=\{0,3,4,7\}$

تعريف :

لنفرض أن R علاقة على A عندها نقول عن هذه العلاقة:

1- متعاكسة إذا وفقط إذا كان aRa لكل عنصر $a\in A$.

2- متماثلة إذا وفقط إذا كان aRb يؤدي إلى bRa .

3- ناقلة إذا وفقط إذا كان aRb و bRc يؤدي إلى aRc .

4- متكافئة عندما وفقط عندما تكون R علاقة متعاكسة ومتماثلة وناقلة.

مثال :

1- نفرض أن $A=R$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية فإن :

2- $(<)$ علاقة ناقلة ولكنها ليست متعاكسة أو متماثلة .

3- $(\geq)$ علاقة ناقلة ومتعاكسة ولكنها ليست متماثلة .

4- $(=)$ علاقة متكافئة .

الدالة: Function

لتكن Y, X مجموعتين غير خاليتين نعرف الدالة f على أنها علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y بحيث يشير كل عنصر $x \in X$ إلى واحد وواحد فقط من عناصر Y يدعى صورة العنصر x ويرمز له بالرمز $f(x)$ ، هكذا نجد أنه يجب أن يتوفر في العلاقة الدالية الشرطان الآتيان:

1- يجب أن يشمل نطاق العلاقة جميع عناصر X.

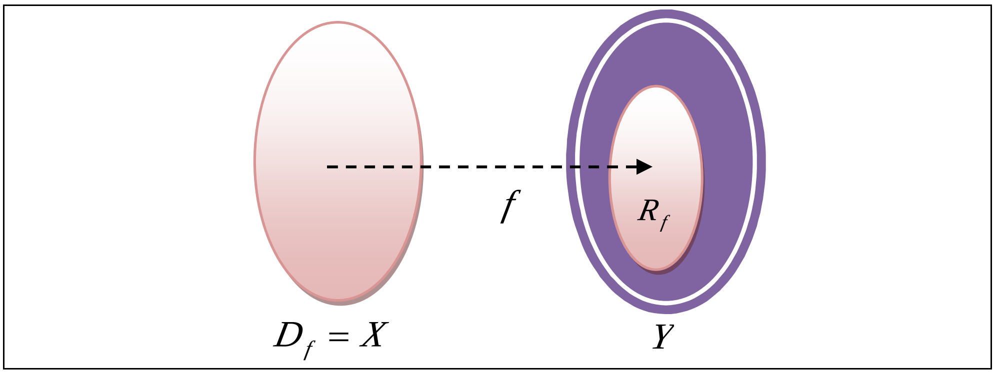
2- عدم ظهور أي عنصر من عناصر X أكثر من مرة واحدة كمركبة أولى في جميع الأزواج المرتبة التي تنتمي إلي العلاقة، أي أن لكل عنصر من X صورة واحدة $f(x)$ في Y.

الدالة Function

إذا كانت X, Y مجموعتين غير خاليتين فإن الدالة $f : X \to Y$ هي علاقة تحدد لكل عنصر $x \in X$ عنصراً واحداً وواحداً فقط $y \in Y$ بحيث : $y = f(x)$ يرمز لنطاق الدالة $f(x)$ بالرمز D_f ومداها بالرمز R_f .

تمثيل الدالة:

تمثيل الدالة مخططياً على الشكل:



مثال : إذا كانت $Y = \{1,2,4,6,9\}$, $X = \{1,2,3\}$ أوجد :

$$R_1 = \{ (x,y) \ : \ y = 2x \}$$
$$R_2 = \{ (x,y) \ : \ y = x^2 \}$$
$$R_3 = \{ (x,y) \ : \ y = 2x + 2 \}$$

ووضح فيما إذا كانت R_1 , R_2 , R_3 علاقات دالية أم لا.

الحل :

$X \times Y = \{ (1,1) , (1,2) , (1,4) , (1,6) , (1,9) , (2,1) , (2,2), (2,4) , (2,6) , (2,9)$
$(3,1) , (3,2) , (3,4) , (3,6) , (3,9) \}$

$R_1 = \{ (1,2) , (2,4) , (3,6) \}$

$R_2 = \{ (1,1) , (2,4) , (3,9) \}$

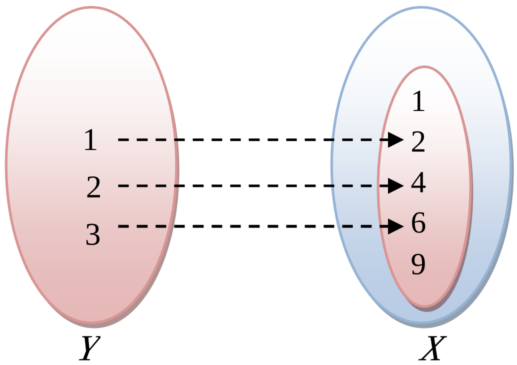
$R_3 = \{ (1,4) , (2,6) \}$

$\because \; Dom(R) = DR_1 = \{1,2,3\} \; , \; Rang(R) = RR_1 = \{2,4,6\}$

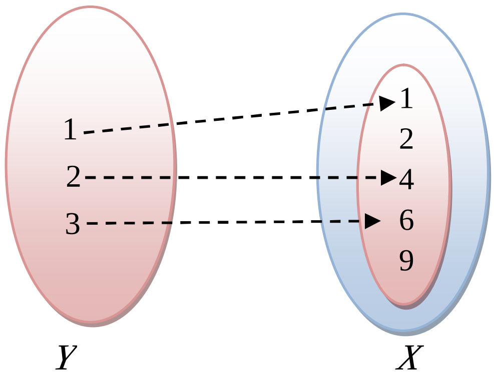
$DR_2 = \{1,2,3\} \; , \; Rang(R) = RR_2 = \{1,4,9\}$

$DR_3 = \{1,2\} \; , \; Rang(R) = RR_3 = \{4,6\}$

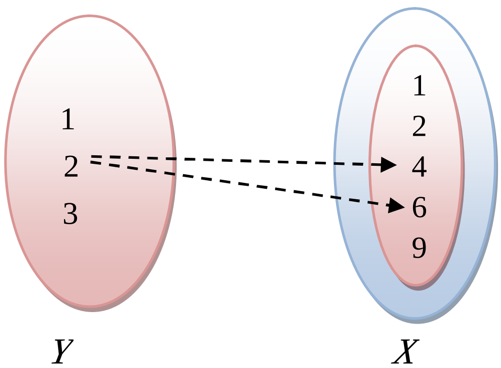
واضح أن R_1 , R_2 علاقتان داليتان، بينما R_3 ليست علاقة دالية .



العلاقة R_1 دالة



العلاقة R_2 دالة



$X \neq DR_3$ وبالتالي

العلاقة R_3

ليست دالة

ملاحظة:

يسمى المتغير $x \in X$ بالمتغير المستقل (Independent variable) وهو متغير النطاق حيث: $D_f = \{ x \in X \ : f(x) \in IR \} \subseteq X$ (نطاق الدالة) ويسمى المتغير $y \in Y$ بالمتغير التابع "dependent variable " وهو متغير المدى حيث إن $R_f = \{ x \in X \ : \ y = f(x) \} \subseteq Y$ (مدى الدالة)، وباعتبار أن الدوال المعرفّة التي سيتم دراستها يكون نطاقها ومداها مجموعات جزئية من IR ، لذلك تسمى هذه الدوال بالدوال الحقيقية.

مثال :

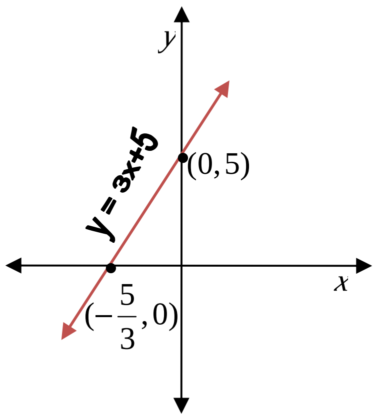
أوجد النطاق والمدى ثم ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = 3x + 5$ حيث $f : IR \rightarrow IR$.

الحل :

واضح أنه لكل $x \in IR$ يكون $3x+5 \in IR$ وبالتالي

يكون $D_f = IR = (-\infty, \infty)$, $R_f = IR = (-\infty, \infty)$

ولرسم الدالة $y = 3x + 5$ نفرض قيمتين للمتغير X وتحدد قيمتا y المقابلتين ونمثلها على المستوى الإحداثي كما هو مبين بالشكل المجاور:



ملاحظة:

بشكل عام منحنى الدالة : $y = f(x) = ax + b$ هو خط مستقيم في المستوى ميله a :

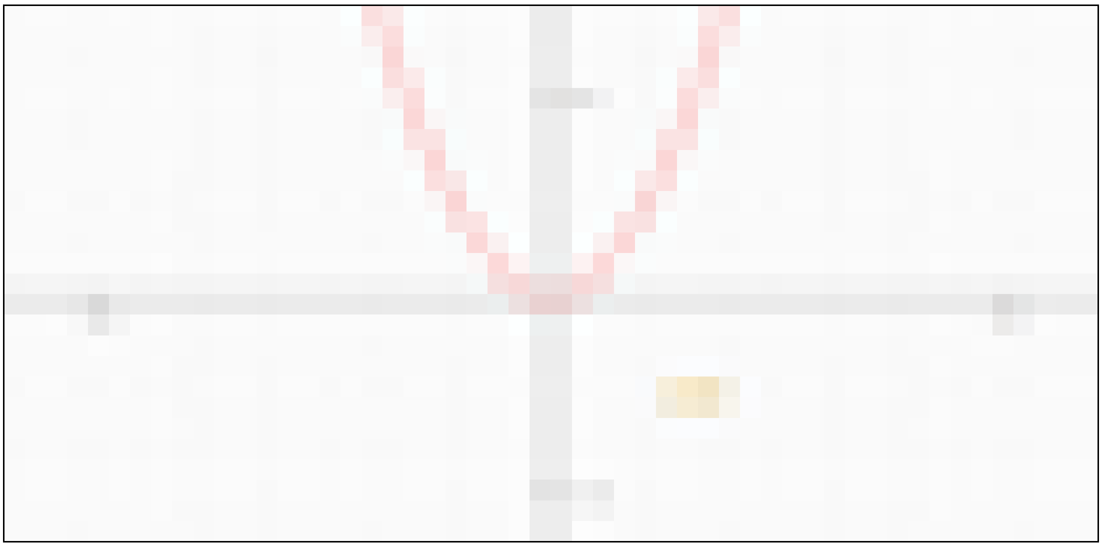
$m = a$, $y = ax + b$ و أن $R_f = IR$, $D_f = IR$

مثال:

أوجد النطاق والمدى وارسم المنحنى للدالة $y = f(x) = x^2$ حيث $f : IR \rightarrow IR$.

الحل :

$D_f = IR = (-\infty, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$ ومنحنى الدالة هو قطع مكافئ محوره التماثلي هو محور الصادات.



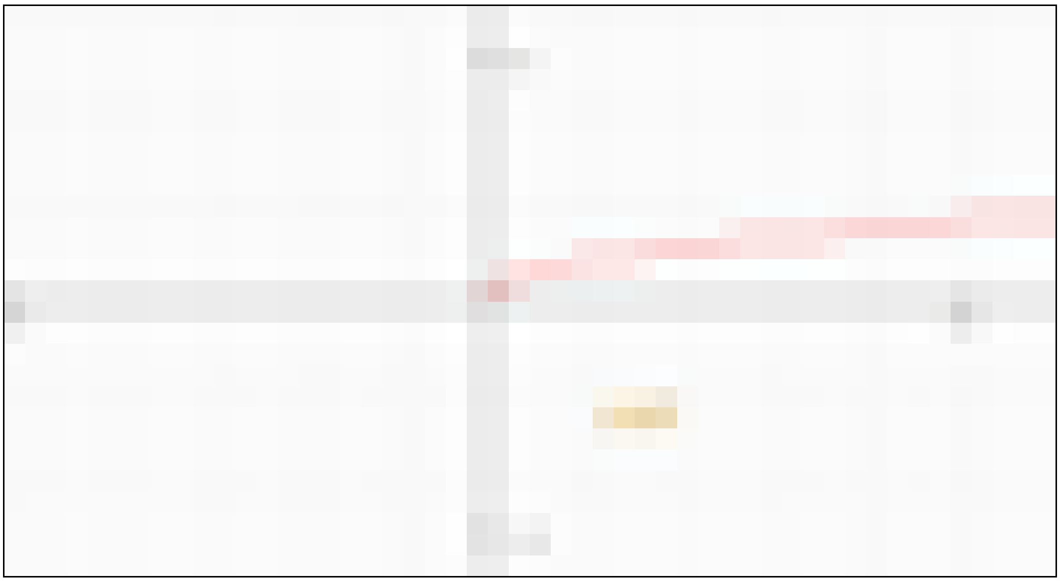
مثال :

أوجد النطاق والمدى وارسم المنحنى للدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$ حيث $f : IR \rightarrow IR$.

الحل :

$$D_f = \{ x \in R : f(x) \in R \} = \{ x \in R : x \geq 0 \} = [0, \infty)$$

$$R_f = \{ (x, y) : y^2 = x \ , \ x , y \in R \} = [0, \infty)$$



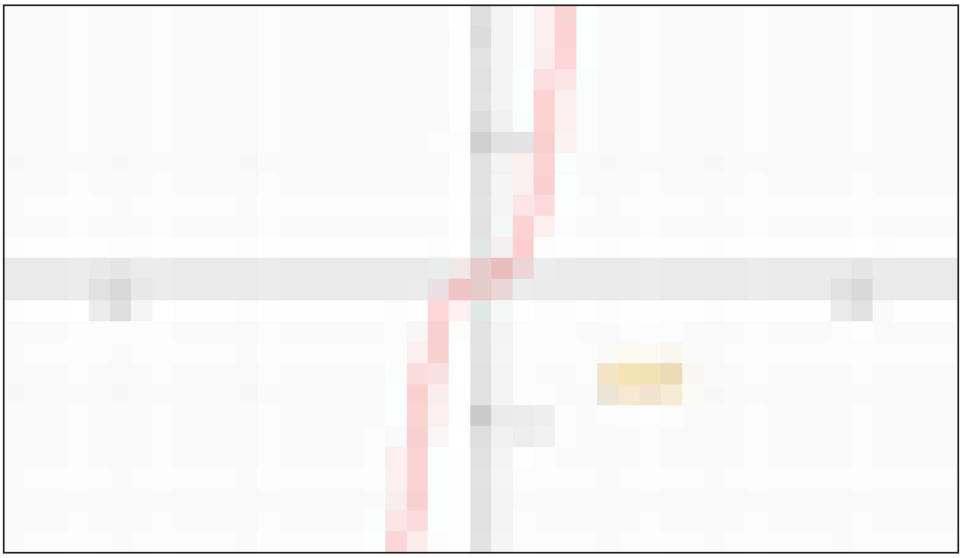
مثال:

أوجد النطاق و المدى وارسم المنحنى للدالة $y=x^3$ حيث $f : IR \to IR$.

الحل :

$$D_f=\{\, x\in R :\ y\in R\,\}=(-\infty,\infty)$$

$$R_f=\{(x,y) : y^2=x\ ,\ x,y\in R\}=(-\infty,\infty)$$



مثال :

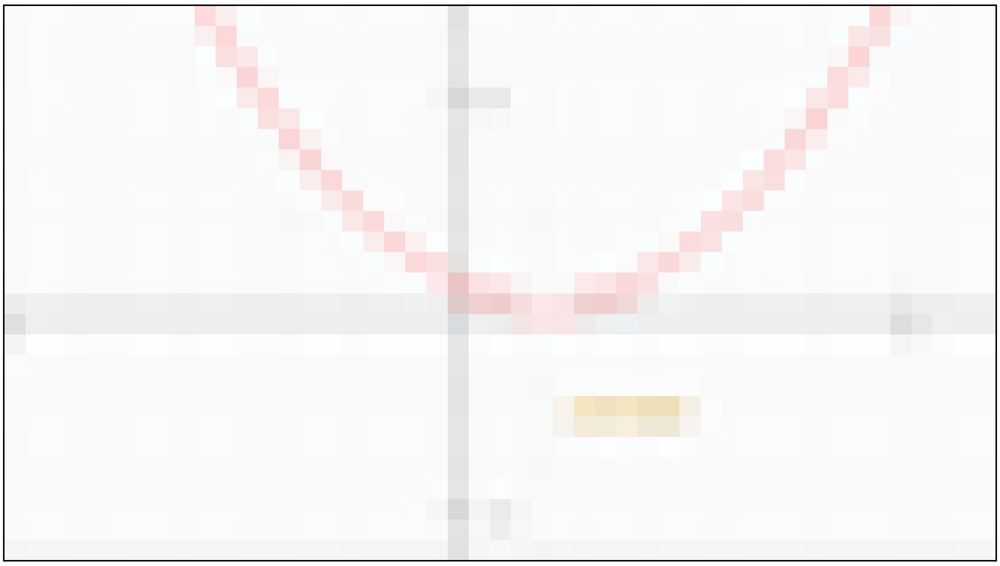
أوجد النطاق و المدى وارسم المنحنى للدالة $y=x^2-2x+1$ حيث $f : IR \to IR$.

الحل :

نلاحظ أن $y=(x-1)^2$ وبالتالي فهي غير سالبة أي أن $y\geq 0$ ،

$$D_f=\{\, x\in R :\ y\in R\,\}=(-\infty,\infty)$$

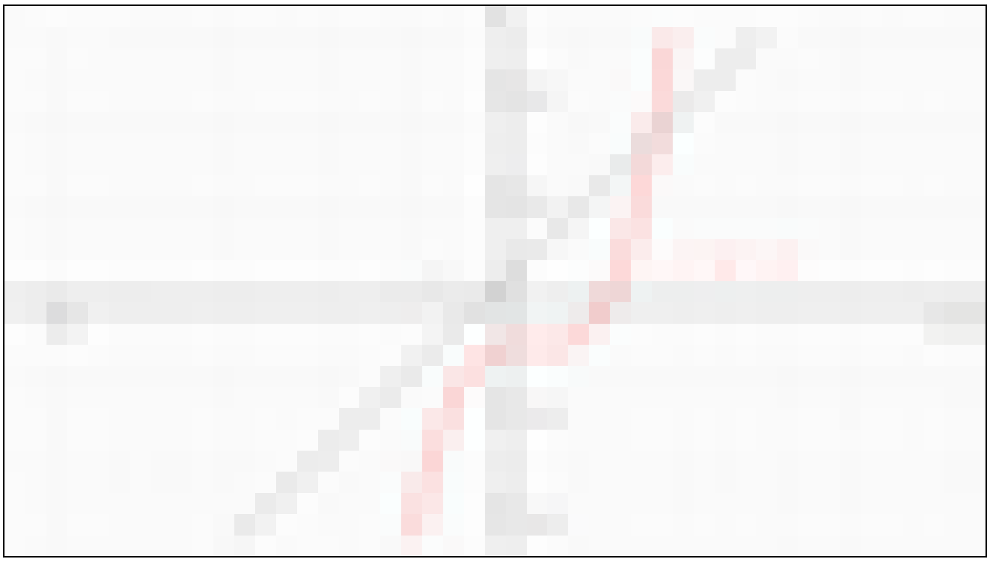
$$R_f=\{(x,y) : y=(x-1)^2\ ,\ x,y\in R\}=[0,\infty)\ .$$



مثال :

أرسم المنحنى للدالة $y = x^3 - 2x^2 + x - 4$ مع المستقيم $y = 4x + 2$ حيث $. f : IR \to IR$

الحل :



العمليات الجبرية على الدوال Algebraic Operations on functions

إذا كانت f ،g دالتين فإن :

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ لكل $(x \in D_f \cap D_g)$.

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ لكل $(x \in D_f \cap D_g)$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ لكل $(x \in D_f \cap D_g)$ بشرط $g(x) \neq 0$.

مثال :

إذا كانت $g(x) = 3x+1$ ، $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ فأوجد: $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، $f \times g$ ، $f \pm g$

الحل :

$(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2} + 3x + 1$ لكل x في النطاق المشترك للداليتين نوجد .

$D_g = R$ ، $D_f = [-2,2]$ منها يكون النطاق المشترك هو $D_f \cap D_g = [-2,2]$

$(f-g)(x) = \sqrt{4-x^2} - 3x - 1$ لكل x في النطاق المشترك للدالتين.

$(f \times g)(x) = \left(\sqrt{4-x^2}\right)(3x+1)$ لكل x في النطاق المشترك للدالتين.

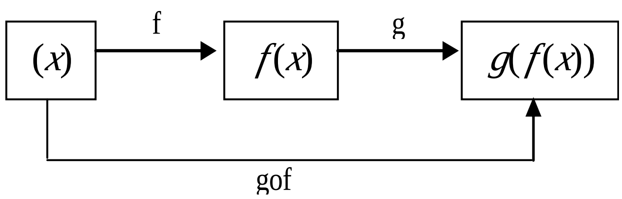
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1}$ بحيث $3x+1 \neq 0$ أي أن $x \neq \frac{-1}{3}$ لكل x في النطاق المشترك للدالتين وهو $D_{\frac{f}{g}} = [-2,2] - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

تعريف:

إذا كانت $f : X \to Y$ ، $g : Y \to Z$ فإن الدالة المركبة (Composite function) هي $go f : X \to Z$ ، $(go\, f)(x) = g(f(x))$ لكل $x \in X$ حيث

$D_g \cap D_f \neq \varphi$ و $D_{g \circ f} = D_g \cap D$

حيث D نطاق الدالة الحاصلة $g(f(x))$:



بشكل مشابه نعرف الدالة التركيبية fog على الشكل التالي:

إذا كانت f و g دالتين عندها الدالة المركبة fog تعرف على الشكل :

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

حيث $D_f \bigcap R_g \neq \varphi$ و $D_{f\circ g} = D_g \bigcap D$

حيث D هو نطاق الدالة المركبة $f(g(x))$.

مثال :

أوجد gof , fog إذا كانت $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2$.

الحل :

لدينا $D_f = R$ $\quad R_f = R$

$D_g = R$ $\quad R_g = [0,\infty)$

منها $D_f \cap R_g = [0,\infty) \neq \varphi$ بذلك نحصل على

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$D_{f\circ g} = D_g \bigcap D = R$ وكذلك نجد $D_g \cap R_f = [0,\infty) \neq \varphi$ بذلك نحصل على:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 + 1$$

منها يكون لدينا $D_{g\circ f} = D_f \bigcap D = IR$ و $R_{g\circ f} = [1,\infty)$

مثال :

أوجد gof , fog إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 16$.

الحل :

$$D_f = [0,\infty) \quad , \quad R_f = [0,\infty)$$

$$D_f = R \quad , \quad R_g = [-16,\infty)$$

منها نحصل على $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 16) = \sqrt{x^2 - 16}$

$$D = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

$$D_{f\circ g} = D_g \bigcap D = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

بذلك يكون لدينا $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x + 16$

وأيضا لدينا $D = R$ منها نحصل على $D_{g\circ f} = D_f \bigcap D = [0,\infty)$

بعض أنواع الدوال Some types of Functions

الدوال كثيرة الحدود polynomial functions

إذا كان $p(x) = a_0 + a_1(x^2) + ... + a_n(x^n)$

حيث $a_0 , a_1 ,.................., a_n$ هي أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$ فإن الدالة $p(x)$ تسمى دالة كثيرة الحدود من الدرجة n .

أمثلة:

$$n = 0 \rightarrow p(x) = 5$$
$$n = 1 \rightarrow p(x) = 2x - 1$$
$$n = 3 \rightarrow p(x) = 4x - x^3$$ وهكذا

نطاق الدوال كثيرة الحدود هي IR ومداها مجموعة جزئية من IR .

– حالات خاصة :

1. الدالة الذاتية " المحايدة " (Identity function)

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى ومعامل x يساوي الواحد ،وهي على الشكل التالي: $f(x) = x$

2. الدالة الثابتة (constant function)

هي الدالة التي لا تحتوي على أي متغيرات $f(x) = c \;\; ; \;\; c \in IR$

الدوال القياسية أو الكسرية: (Rational functions)

إذا كانت $q(x)$, $p(x)$ كثيرتي حدود فإن الدالة القياسية تكون على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad , \quad q(x) \neq 0$$

الدالة f تسمى دالة قياسية (كسرية)

نطاق الدالة القياسية هو جميع الأعداد الحقيقية ماعدا القيمة التي تجعل المقام يساوي صفراً بذلك يكون نطاق الدالة هو $D_f = IR - \{ x \in IR \;\; : \;\; q(x) = 0 \}$

فمثلا :

إذا كان $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$ فإن:

$$D_f = IR - \{ x \in IR : x^2 - 1 = 0 \} = IR - \{-1, 1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

دالة الجذر التربيعي: Square root function

تعرف دالة الجذر التربيعي بأنها دالة من الشكل $f(x) = \sqrt{g(x)}$ حيث $g(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n يحدد نطاق الدالة الجذرية على الشكل :

$$D_f = \{x \in R \quad : g(x) \geq 0\} \quad , \quad R_f \subseteq [0, \infty)$$

مثال:

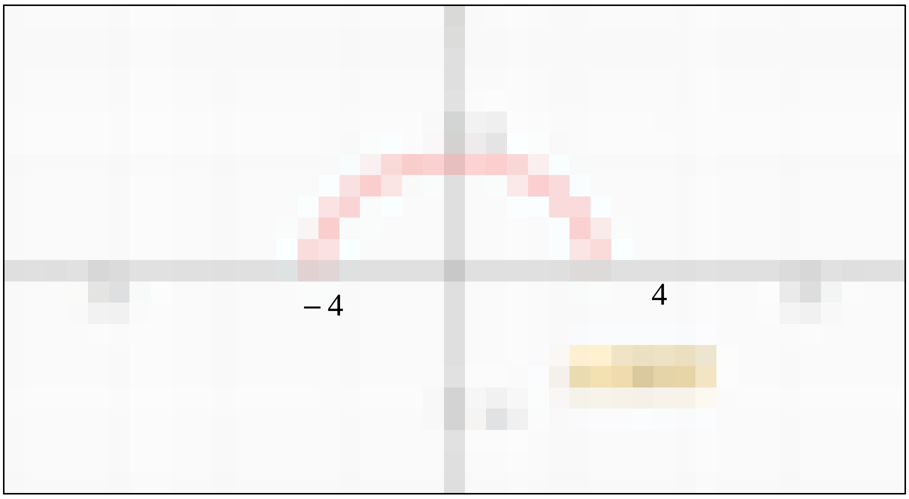
حدد نطاق الدالتين التاليتين :

-1 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

-2 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

الحل:

- نطاق الدالة $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ هو $D_f = \{x \quad : \quad 16 - x^2 \geq 0\}$ منها يكون لدينا $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ من العلاقة السابقة يكون النطاق $D_f = [-4, 4]$ كما في الشكل التالي:



- أما نطاق الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ منها يكون لدينا

$$D_f = \{x \quad : \quad x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad , \quad x = -2$ منها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	-1	بينهما	∞
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

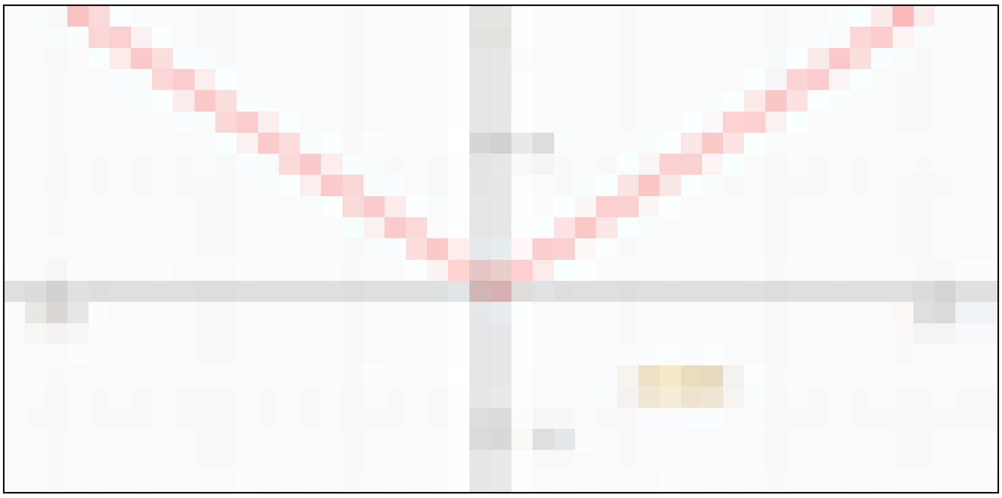
ونطاق الدالة هو $R_f=(-\infty,-2]\cup[-1,\infty)$

دالة القيمة المطلقة: Absolute value function

تعرف دالة القيمة المطلقة $|x|$ على الشكل التالي:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & if \quad x\geq 0 \\ -x & if \quad x<0 \end{cases}$$

بشكل عام فإن : $D_f=R$ ، $R_f\subseteq[0,\infty)$



مثال:

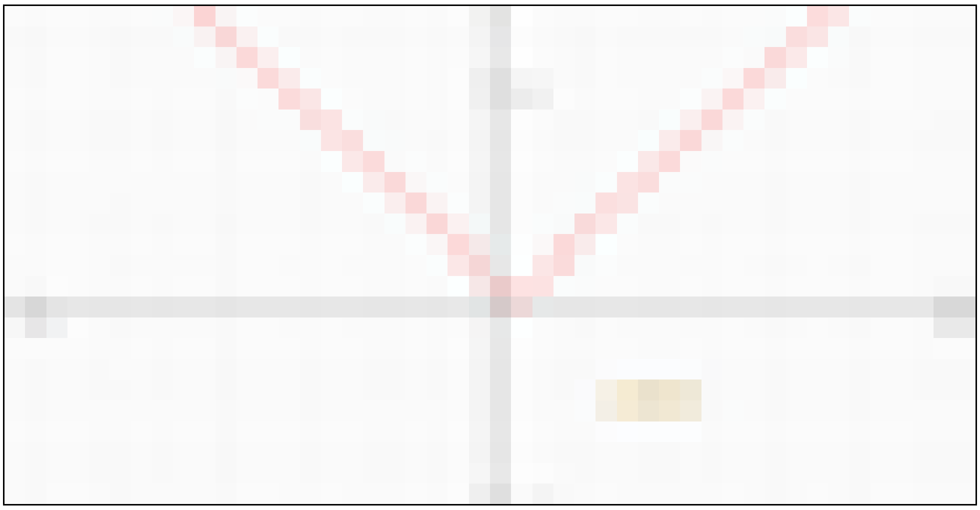
أوجد نطاق ومدى الدالة $f(x)=|2x+1|$ مع رسم الدالة.

الحل:

الدالة $f(x)=|2x+1|$ تأخذ الشكل:

$$f(x)=|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x\geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & , \quad x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

نطاقها هو $D_f=R$ و $f(x)=|2x+1|\geq 0 \quad \Rightarrow R_f=[0,\infty)$



مثال:

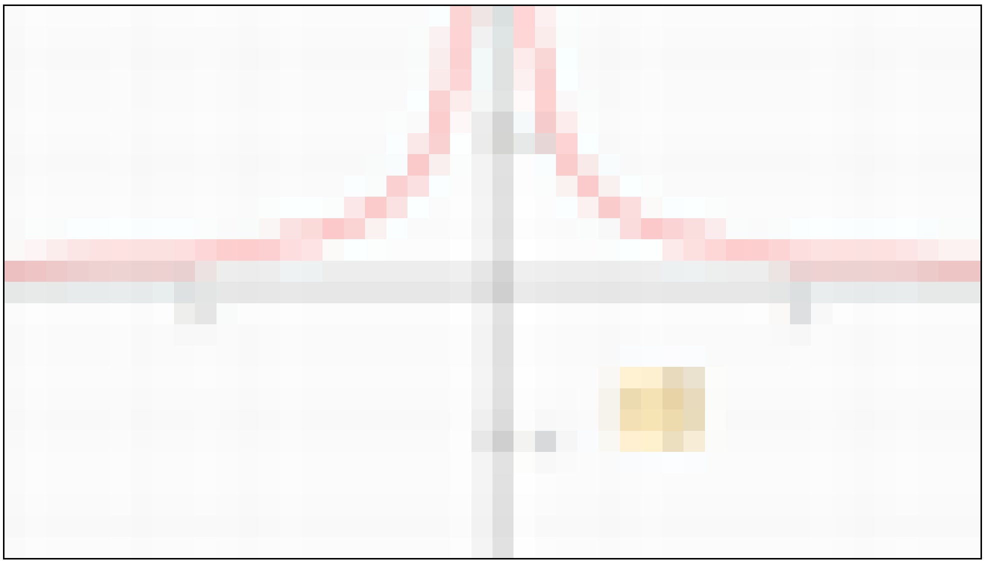
حدد نطاق ومدى الدالة : $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$.

الحل:

الدالة $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$ تأخذ الشكل:

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2}=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x} & , \quad x>0\\[2ex] \dfrac{-x}{x^2}=\dfrac{-1}{x} & , \quad x<0\end{cases}$$

نطاقها هو $D_f=IR$ ومداها هو: $R_f=(0,\infty)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|x|}{x^2}>0$



الدوال الجبرية Algebraic functions

إذا نتجت الدالة $f(x)$ من تركيبة جبرية من العمليات (الجمع – الطرح – الضرب – القسمة الجذور) لكثيرات الحدود، فإن الدالة $f(x)$ تسمى دالة جبرية .

فمثلا :

الدوال التالية جميعها دوال جبرية :

$f(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\dfrac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x+10}}$ و $f(x)=x^3-2\sqrt[3]{x}$.

دالة الصحيح الأعظم Greatest Integer Function

هي الدالة التي تنقل كل عدد حقيقي x إلى العدد الصحيح الوحيد، الذي هو أكبر من جميع الأعداد الصحيحة، التي هي أقل من x أو تساويها ويرمز لها بالرمز $[x]$، وتعرف دالة الصحيح الأعظم رياضياً كالأتي $f(x)=n$ حيث $n\le x\le n+1$ و n و $n+1$ عددان صحيحان متعاقبان.

مثال:

جد الصحيح الأعظم للقيم التالية $[2,5]$ ، $[1,5]$، $[-3,6]$.

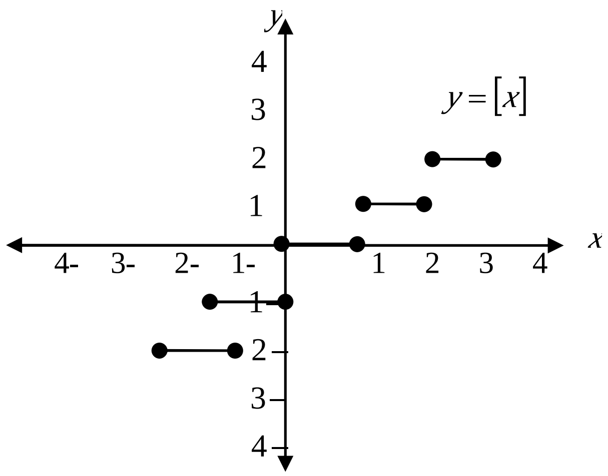
الحل :

$[1,5]=1$ ، $[2,5]=2$ ، $[-3,6]=-3$

مثال:

الجدول التالي يبين طريقة إيجاد العدد الصحيح لدالة الأعداد الصحيحة المختلفة مع الرسم.

n	$n \le x \le n+1$	$[x]$
-2	$-2 \le x \le -1$	$[x]=-2$
-1	$-1 \le x \le 0$	$[x]=-1$
0	$0 \le x \le 1$	$[x]=0$
1	$1 \le x \le 2$	$[x]=1$
2	$2 \le x \le 3$	$[x]=2$



$D_f = IR \ , \ R_f = Z$

وتسمى بالدالة ألدرجيه أو السلمية.

الدوال الزوجية والدوال الفردية : Even and odd functions

لتكن $f : X \to Y$ دالة عندئذ :

1- تسمى الدالة " f " دالة زوجية إذا كان :

$f(-x) = f(x)$ لكل $x \in D_f$

2- تسمى الدالة " f " دالة فردية إذا كان :

$f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in D_f$

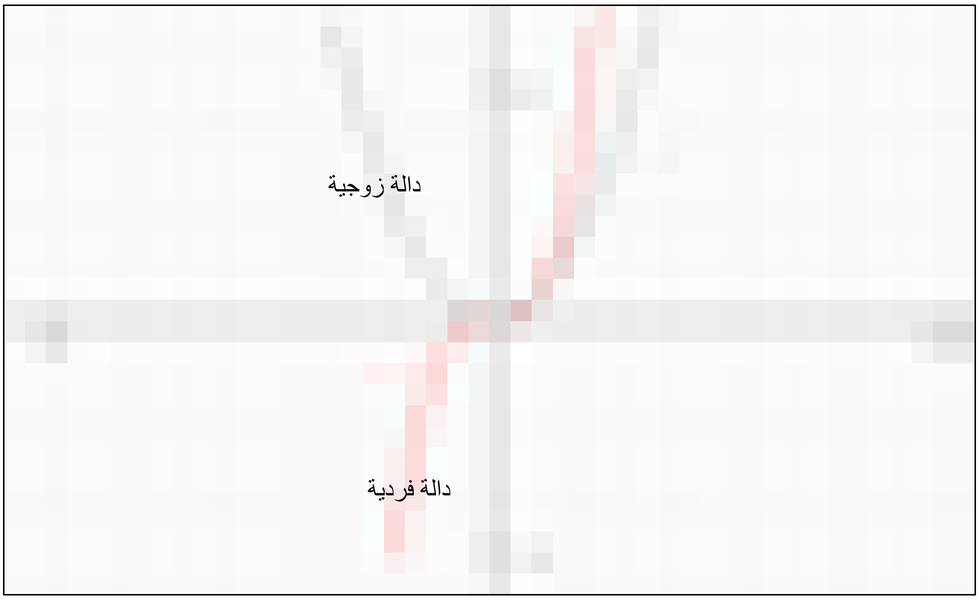
3- تكون الدالة " f " ليست فردية ولا زوجية إذا لم يتحقق ذلك .

مثلاً:

بين فيما إذا كانت الدوال التالية فردية أم زوجية أم غير ذلك موضحاً الإجابة بالرسم.

$f(x)=x^2$ دالة زوجية لان $f(x)=f(-x)=x^2=(-x^2)$

$f(x)=x^3$ دالة فردية لان $f(x)=f(-x)=-x^3=(-x^3)$



$f(x)=c$ دالة زوجية؛ لأنها ثابتة، ولان : $f(-x)=c=f(x)$

$f(x)=|x-2|$ ليست فردية وليست زوجية؛ لأن :

$$f(x)=|\ x-2\ |=\begin{cases} x-2 & , \quad x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2 \\ -(x-2) & , \quad x-2>0 \rightarrow x<2 \end{cases}$$

$$f(-x)=|-x-2|$$

$$f(-x)=|(-1)(x+2)|$$

$\therefore\ f(x)=|x+2|\neq -f(x)$ ليست فردية وليست زوجية

الدالة الأحادية (المتباينة) : one to one function

لتكن $f\ :\ X\rightarrow Y$ عندئذ تسمى الدالة f دالة أحادية إذا وفقط إذا كان $f(a)=f(b)\ \Leftrightarrow\ a=b$ لكل $a\,,b\in x$ ولبرهان أن f دالة متباينة نفرض أن $f(a)=f(b)$ و نبرهن على أن $a=b$.

الدالة الفوقية(الغامرة) :Onto function

لتكن $f\ :\ X \to Y$ عندئذ تسمى الدالة f دالة فوقية إذا وفقط، إذا كان $R_f = Y$

أي أن المدى = النطاق المصاحب.

الدالة التقابلية "تناظر أحادي": Correspondence function

لتكن $f : X \to Y$ عندئذ تسمى f دالة تقابلية إذا كانت أحادية وفوقية (متباينة وغامرة) في آن واحد.

فمثلا:

$f\ :\ IR \to IR$ حيث $f(x) = 2x+1$

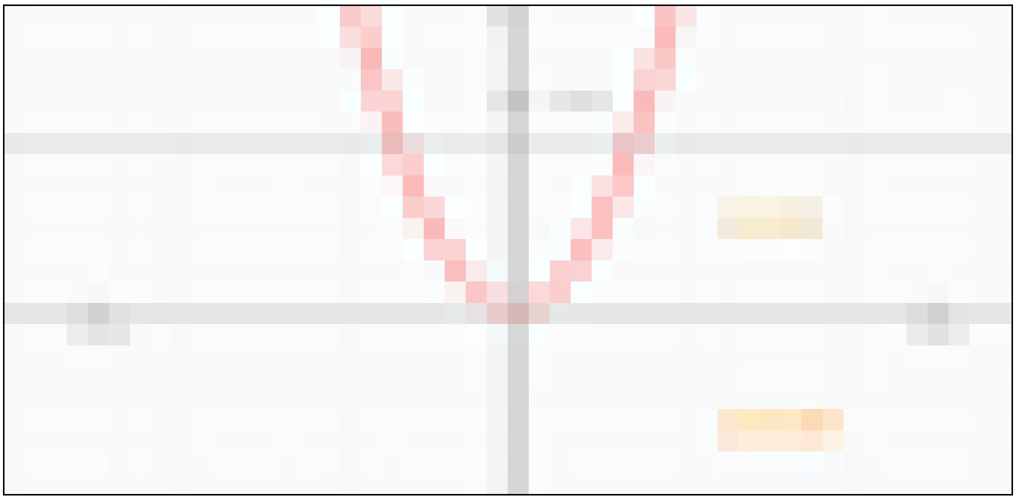
حيث $f(x)$ دالة أحادية (متباينة) لان :

$$f(a) = f(b)$$
$$2a + 1 = 2b + 1$$
$$\therefore \quad a = b$$

وأن $R_f = IR = y$

ملاحظة:

من خلال رسم الدالة تكون الدالة أحادية (متباينة)، إذا كان أي خط مستقيم أفقي (عمودي على محور المدى) لا يقطع منحنى الدالة إلا في نقطة واحدة على الأكثر، فمثلا $f(x)=x^2$ ليست أحادية(متباينة)؛ لأنه من خلال الرسم (هندسياً) نجد أن الخط المستقيم الأفقي يقطع منحنى الدالة في نقطتين كما في الشكل :



مثال:

إذا كانت الدالة $f(x)=2x+3$ حيث $f:IR\rightarrow IR$ فهل تمثل تقابل.

الحل:

بما أن الدالة f لها الشكل التالي: $f:x\rightarrow f(x)=2x+3$ ونطاقها هو $D_f=IR$ ولكل $\forall x_1,x_2\in IR$ نجد: $\left(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2\right)$، ومنها تكون الدالة f متباينة. وبما أن $R_f=IR$ فهو مساوياً للنطاق المصاحب Y وبالتالي الدالة f تكون فوقية (غامرة).

إذا f تمثل تقابلا واحد لواحد .

مثال:

إذا كانت الدالة $f(x)=x^3$ حيث $f:IR\rightarrow IR$ فهل تمثل تقابلا.

الحل:

بما أن الدالة f لها الشكل التالي: $f:x\rightarrow f(x)=x^3$ ونطاقها هو $D_f=IR$ ولكل $\forall x_1,x_2\in IR$ نجد: $\left(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^{\ 3}=x_2^{\ 3}\Rightarrow x_1=x_2\right)$، ومنها تكون الدالة f متباينة .

وبما أن $R_f=IR$ فهو مساوياً للنطاق المصاحب Y وبالتالي الدالة f تكون فوقية إذا f تمثل تقابل أحاديا .

الدوال المعرفة مقطعياَ : piecewise defined functions

هذا النوع من الدوال له صور متعددة معرفة على أكثر من مجال واحد.

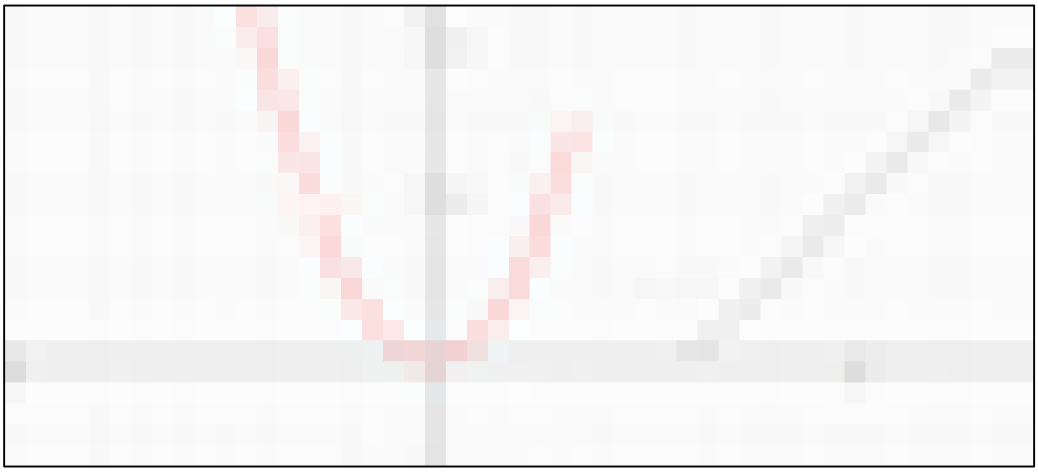
مثال :

ارسم منحنى الدالة f حيث :

$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<3 \\ x-3 & , \quad x\geq 3 \end{cases}$ وحدد مجموعة النطاق ومجموعة المدى.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة هو: $\therefore \ D_f = IR$ و $R_f = [0\,,\infty)$



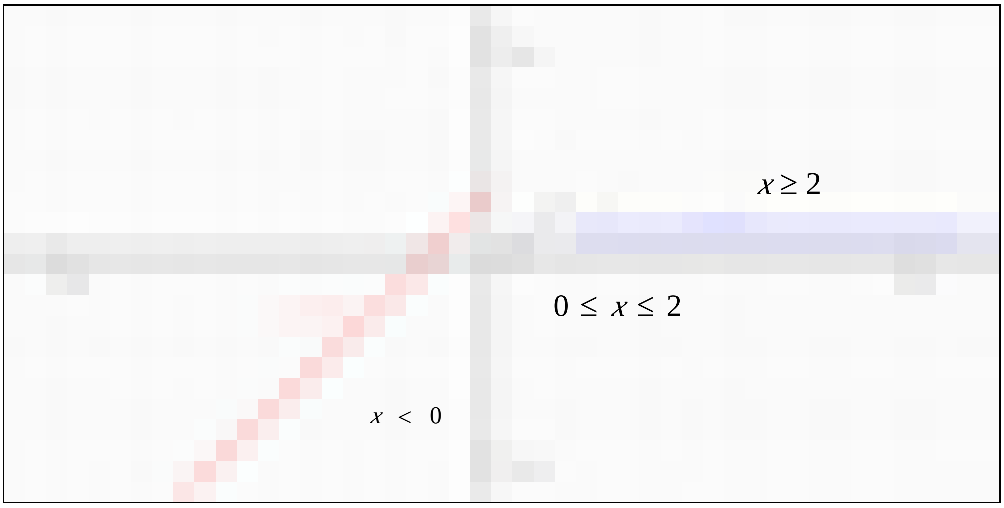
مثال :

ارسم منحنى الدالة في كل حالة

$$y(x)=\begin{cases} 2x+3 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad 0\leq x\leq 2 \\ 1 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

الحل:

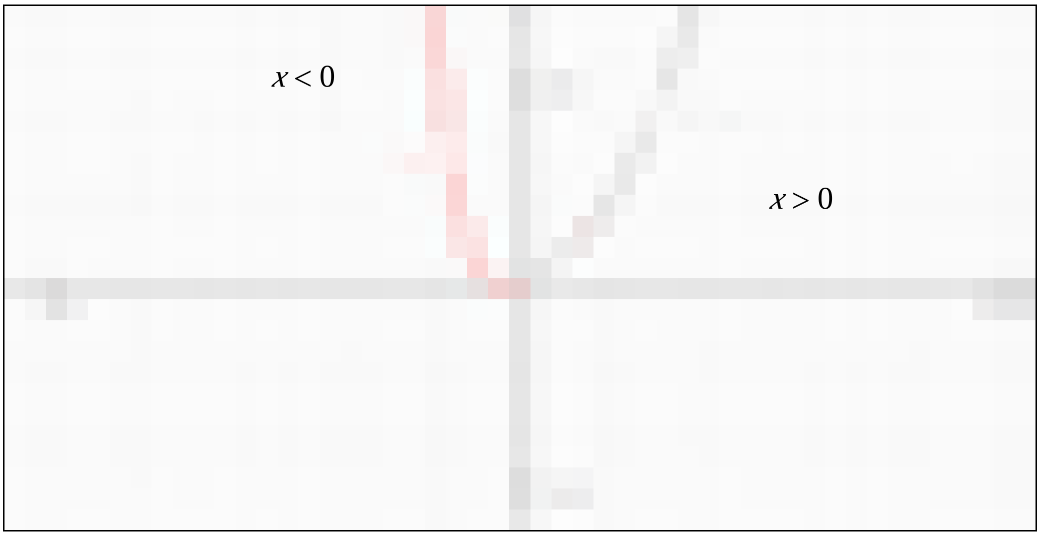
واضح أن نطاق ومدى الدالة هو $D_g = IR$ و $R_g = (-\infty\,,4)$



مثال :

ارسم منحنى الدالة في كل حالة $y(x) = \begin{cases} x^4 & , \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$.

الحل:



الدولة المحدودة وغير المحدودة Bounded and unbounded functions

تعريف 1: إذا وجد عدد M وحقق $(\forall \quad x \in D_f : f(x) \le M)$ عندها نقول أن الدالة $f(x)$ محدودة من الأعلى ونسمي العدد M حداً أعلى للدالة.

تعريف 2: إذا وجد عدد m وحقق العلاقة $(\forall \quad x \in D_f : f(x) \ge m)$ عندها نقول أن الدالة $f(x)$ محدودة من أسفل (أدنى) ونسمي العدد m حداً أسفل أدنى) للدالة.

تعريف 3: إذا وجد عددان M و m ،وحقق $(\forall \quad x \in D_f : m \le f(x) \le M)$ نقول عن الدالة $f(x)$ أنها محدودة.

ملاحظات:

1- كل دالة محدودة $f(x)$ تحقق الخاصة $(\forall \quad x \in D_f : |f(x)| \le L)$.

2- إذا كانت $f(x)$ دالة محدودة فإن مجموعة مداها R_f تكون محدودة .

3- يقال عن دالة إنها غير محدودة إذا لم تكن دالة محدودة .

4- كل دالة غير محدودة يجب أن تحوي مجموعة مداها $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال:

حدد فيما إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ محدودة أم لا.

الحل:

نحدد نطاق الدالة $D_f = \{x: \quad 9-x^2\}$ منها يكون لدينا $9 - x^2 \ge 0 \Rightarrow 0 \le x \le 9$ بذلك نحصل على $0 \ge -x^2 \ge -9 \Rightarrow 9 \ge 9 - x^2 \ge 0$ ومن هذه العلاقة نوجد قيمة $3 \ge \sqrt{9-x^2} \ge 0 \Rightarrow 3 \ge f(x) \ge 0$ بذلك نصل إلى أن $R_f = [0,3]$ والدالة $f(x)$ محدودة .

الدوال الدورية Periodic Functions

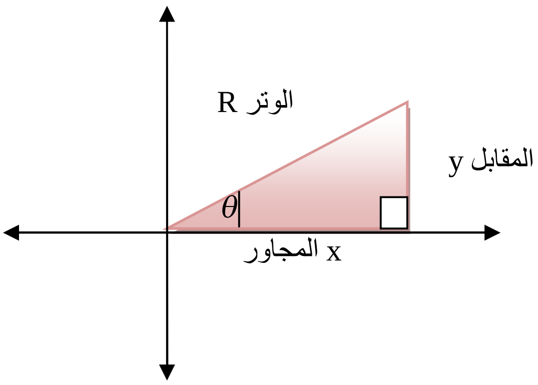
تعريف 1: يقال عن الدالة $f(x)$ إنها دالة دورية إذا أعادت مجموعة قيمها ضمن دورة محدودة.

تعريف 2: يسمى أصغر مدى لقيم x التي تتم فيها الدالة $f(x)$ كامل قيمها (تمسح دورة كاملة من القيم) دورة الدالة.

هناك الكثير من الدوال الدورية المحدودة وغير المحدودة المتعلقة بالظواهر الطبيعية والفيزيائية والبيولوجية ومن هذه الدوال الساعة الزمنية ونبضات القلب وكذلك الموجات الصوتية والمكروية .

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

نعلم بأن النسب المثلثية لمثلث قائم الزاوية هي:



$$\frac{1}{\sin\theta} = c\sec\theta = \frac{R}{y}$$

معكوسها $\sin\theta = \frac{y}{R}$

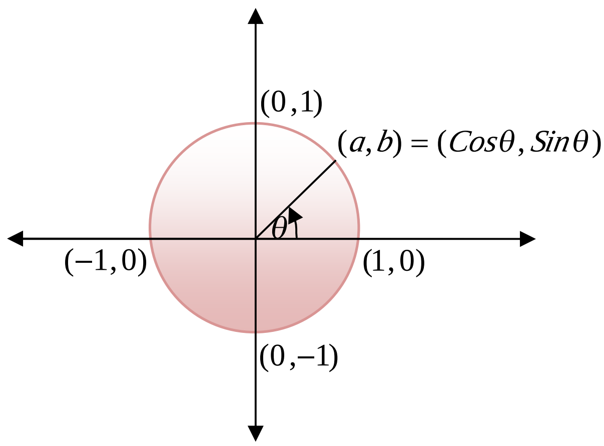
$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \frac{R}{x}$$

معكوسها $\cos\theta = \frac{x}{R}$

$\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta = \frac{x}{y}$ معكوسها $\tan\theta = \frac{y}{x}$

التمثيل البياني للدوال المثلثية :

إذا أخذنا دائرة الوحدة (دائرة مركزها نقطة الأصل $(0,0)$ ونصف قطرها يساوي 1 وأخذنا النقطة (a,b) وجعلناها تتحرك على الدائرة نجد أن: $\sin\theta = b$, $\cos\theta = a$



أي أن النقطة (a,b) هي النقطة $(\cos\theta , \sin\theta)$ ، التي إذا تحركت في اتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، نجد أن الإحداثي الصادي $\sin\theta$ يزداد من الصفر حتى1، كلما زادت θمن $\theta = 0$ إلى $\theta = \frac{\pi}{2}$، ثم ينقص $Sin\theta$ من 1 حتى 0، كلما زادت θ من $\theta = \frac{\pi}{2}$ إلى $\theta = \pi$، ونلاحظ كذلك أن $Sin\theta$ يأخذ في النقصان من 0 حتى (-1)، كلما زادت θ من $\theta = \pi$ حتى $\theta = \frac{3\pi}{2}$، ثم يزداد $Sin\theta$من-1 حتى 0 ، كلما زادت θ من $\theta = \frac{3\pi}{2}$ حتى $\theta = 2\pi$، أي أن المسار يعاد من جديد (أي يتكرر كل 2π) وبالتالي نجد :

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

كذلك نجد إن: $\sin x$, $\cos x$ دالتان دوريتان، ودورة كل منهما 2π .

ملاحظة:

الدالتان $\sin x$, $\cos x$ دالتان محددتان لأن: $-1 \le \sin x \le 1, -1 \le \cos x \le 1$.

1- دالة الجيب $y = \sin x$

خواصها :

هي دالة دورية تكرر نفسها كل دور 2π، وهى دالة فردية؛ لأن $\sin(-x) = -\sin x$

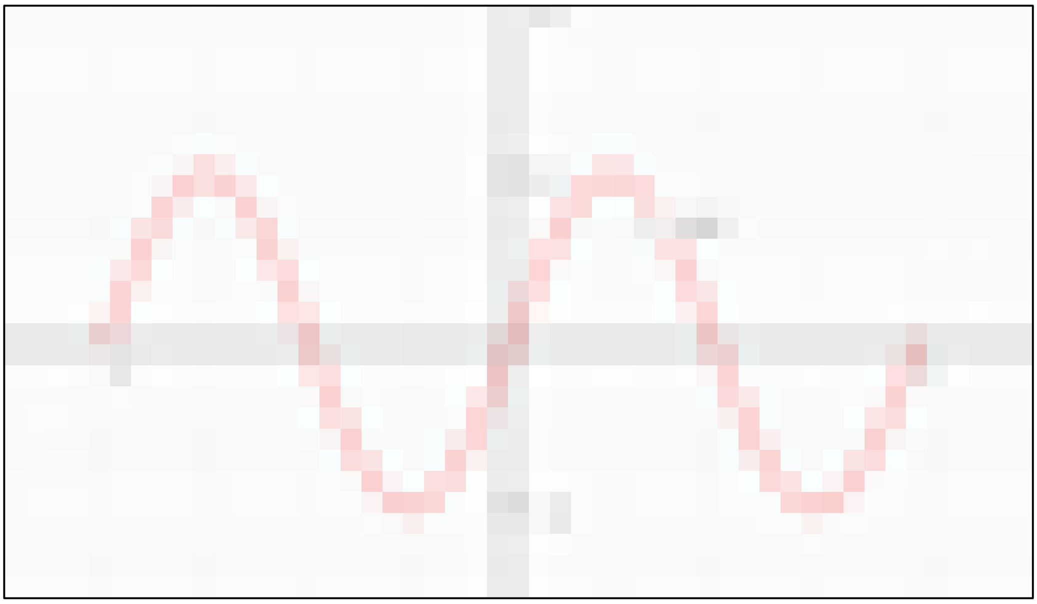
ونطاق الدالة هو $D \in (-\infty , \infty)$

ومداها هو $R \in [-1 , 1]$

وهى معرفة ومتصلة وقابلة للاشتقاق لجميع قيم IR

وهى ليست أحادية على نطاقها ولكن أحادية على الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ وأيضا على الفترة $\left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



نلاحظ : على الشكل :

إن شكل الدالة يتكرر من جديد كل 2π لهذا فإن : $\sin(x+2\pi)=\sin x$

(و هذا يعنى أن $y=\sin x$ دالة دورية ودورتها 2π)

مثال:

برهن صحة العلاقات التالية:

$\sin(\pi - x) = \sin x$ ، $\sin(-x) = -\sin x$.

الحل:

نعلم أن $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

وبالتالي: $\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x$

منها
$$\sin(\pi - x) = 0 \cos x - (-1) \sin x$$
$$= \sin x$$

وكذلك:

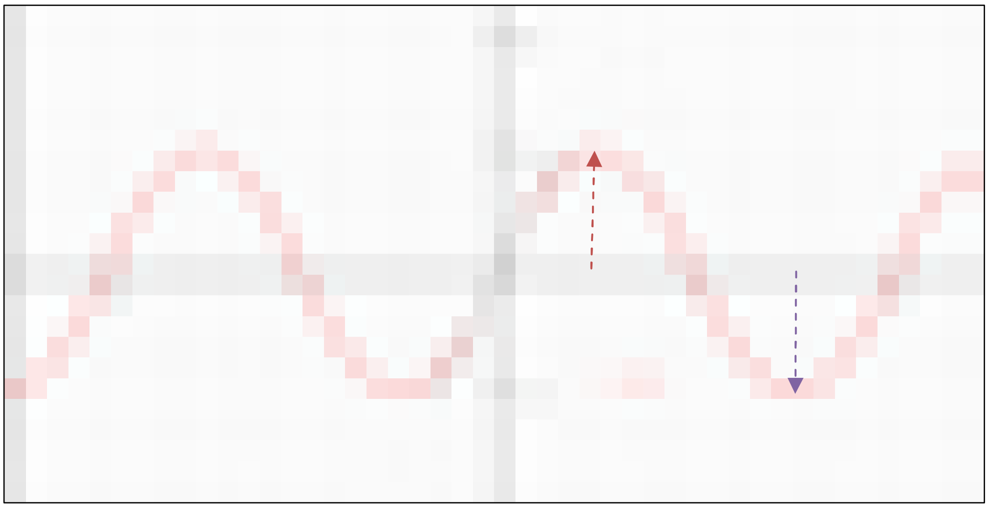
$$\sin(-x) = \sin(0 - x)$$

منها نحصل على
$$\sin(-x) = \sin(0) \cos(x) - \cos(0) \sin(x)$$
$$= 0 \cos(x) - (1) \sin(x) = -\sin x$$

مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\sin x & : \ |x|\ge 1\\ x & : \ |x|<1\end{cases}$.

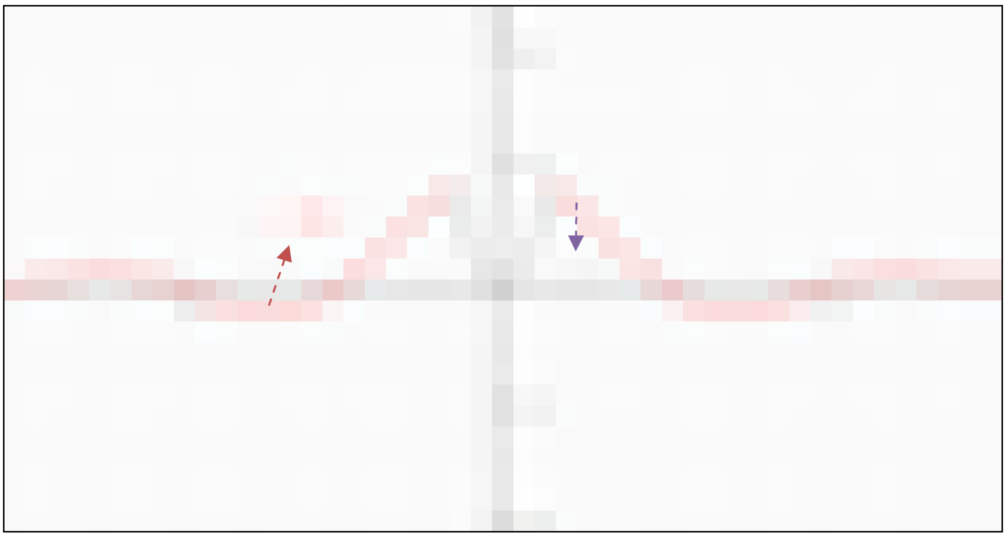
الحل:



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin(x), & |x|\ge 1\\ x^2, & |x|<1\end{cases}$.

الحل:



2- دالة جيب التمام $y = \cos x$.

خواصها :

النطاق هو $D \in (-\infty , \infty)$

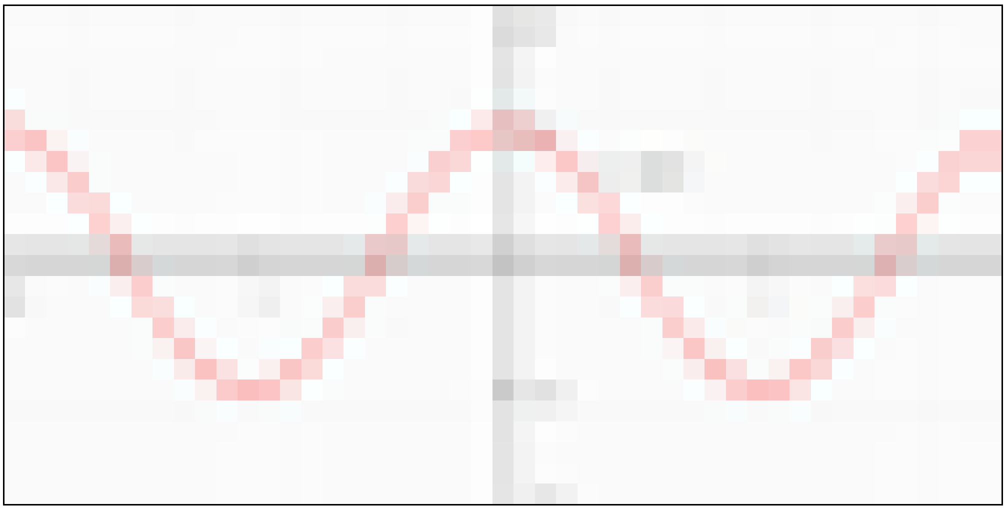
المدى هو $R \in [-1 , 1]$

الدالة زوجية لأن $\cos(-x) = \cos x$

الدالة ليست أحادية (متباينة) على نطاقها وهي متباينة في الفترة $[0, \pi]$.

الدالة دورية ودورتها 2π أي أن $\cos(x + n2\pi) = \cos x$ حيث $n \in IR$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



مثال:

برهن صحة العلاقات التالية:

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ ، $\cos(-x) = \cos x$.

الحل:

نعلم أن $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

ومنها $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x$

وبذلك يكون لدينا

$$\cos(\pi - x) = (-1)\cos x + 0\sin x$$
$$= -\cos x$$

وكذلك:

$$\cos(-x) = \cos(0 - x)$$

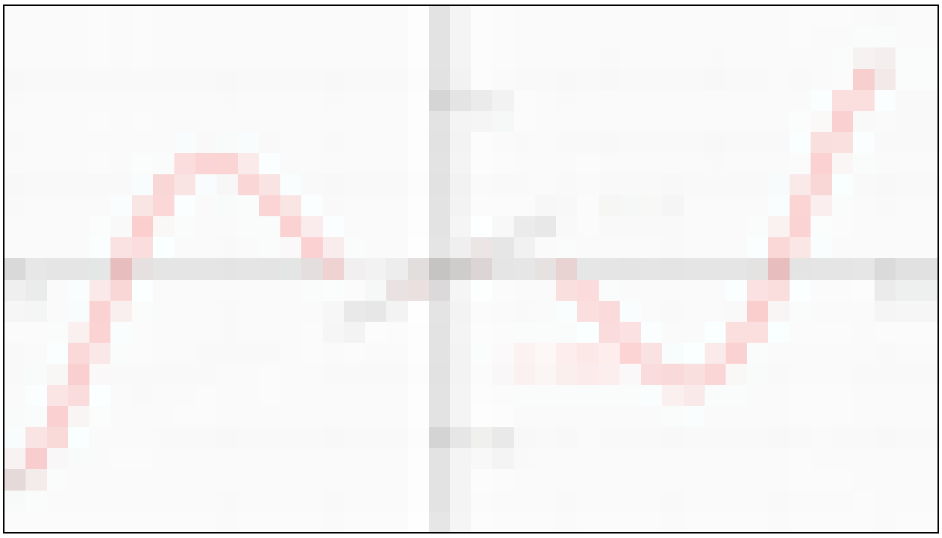
منها نحصل على:

$$\cos(-x) = \cos(0)\cos(x) + \sin(0)\sin(x)$$
$$= 1\cos(x) + 0\sin(x) = \cos x$$

مثال:

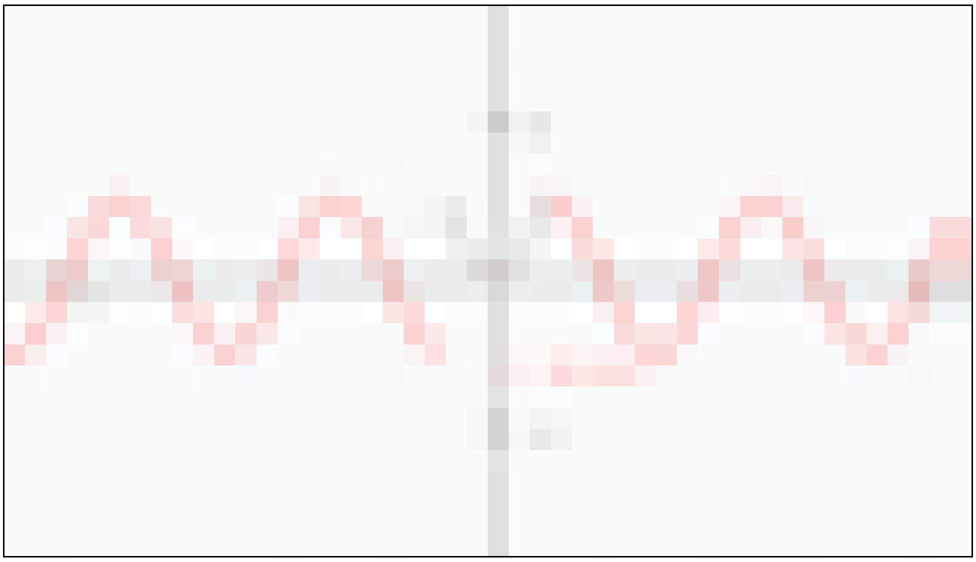
ارسم الدالة $f(x) = \begin{cases} x\cos(x): & |x| \geq \frac{\pi}{4} \\ x \quad : & |x| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

الحل:



مثال: ارسم الدالة $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cos(x): & |x| \geq \frac{\pi}{4} \\ x^2 \quad : & |x| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

الحل:



3- دالة الظل $y = \tan x$.

خواصها :

النطاق $D \in IR - \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots \quad \ldots. \right\}$

$D = IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \right\}$ حيث $n \in IZ$

المدى $= IR$

الدالة فردية ؛ لان $\tan(-x) = -\tan x$

الدالة أحادية (متباينة) ضمن دورة واحدة لها.

الدالة دورية ودورها π أي أن $\tan(x + n\pi) = \tan x$ حيث $n \in IZ$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**كمية غير معرفة**



مثال:

برهن صحة العلاقات التالية: $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ ، $\tan(-x) = -\tan x$.

الحل:

نحن نعلم بأن $\tan(a-b) = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}$ وبالتالي:

$\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \dfrac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$ وكذلك: $\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$

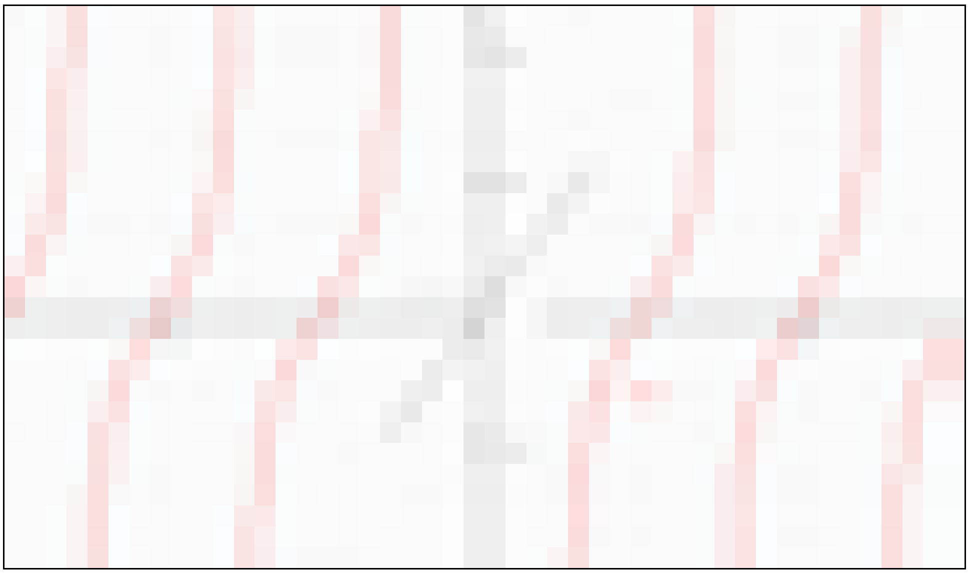
ومنها نحصل على $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

مثال:

ارسم الدالة
$$f(x) = \begin{cases} \tan(x): & |x| > \dfrac{\pi}{2} \\ x \quad : & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
.

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:

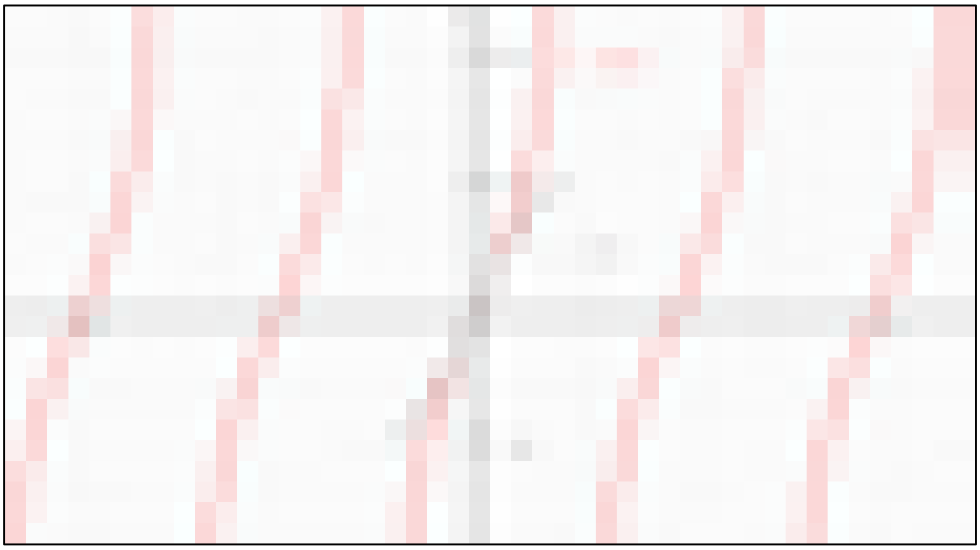


مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\tan(x): & |x|>\frac{\pi}{2}\\ \sin(x): & |x|\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



4- دالة القاطع $y = \sec x$.

يمكن كتابة دالة القاطع بطريقتين :

$$y = \sec x \quad or \quad y = \frac{1}{\cos x} \quad , \ \cos x \neq 0$$

خواصها:

النطاق هو $D \in IR - \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ... \right\}$

أي $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \right\} \ , \ N \in IZ$

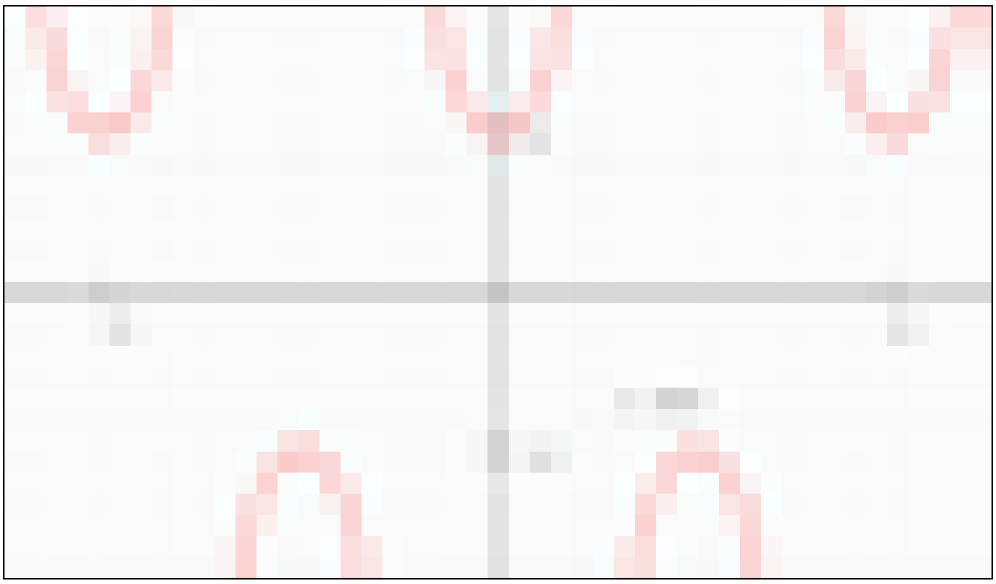
المدى هو $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

الدالة زوجية ؛ لان $\sec(-x) = \sec x$

الدالة ليست أحادية(متباينة) .

الدالة دورية ودورتها 2π أي أن $\sec x = \sec(x + 2n\pi) \ ; \ n \in IZ$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	**كمية غير معرفة**	-1



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\sec(x): & |x|\le\frac{\pi}{2}\\ x^2 \quad : & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

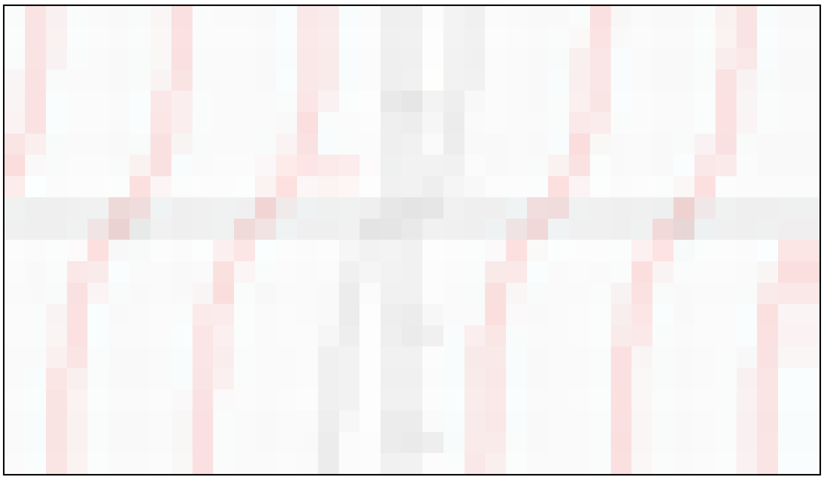
الحل: نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\sin x\sec(x) & : |x|>\frac{\pi}{2}\\ x^3 & : |x|\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

الحل: نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



5–دالة قاطع التمام $y = c\sec x$.

يمكن كتابة دالة قاطع التمام بطريقتين :

$$y = c\sec x \quad or \quad y = \frac{1}{\sin x} \quad , \ \sin x \neq 0$$

خواصها :

النطاق $D_f \in IR - \{ n\pi \} \ ; \ n \in IZ$

المدى هو $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

الدالة فردية وليست أحادية (متباينة).

الدالة دورية ودورها 2π أي $n \in IZ \ ; \ c\sec x = c\sec(x + 2n\pi)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$c\sec x$	0	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	**1**	**كمية غير معرفة**

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



مثال:

ارسم الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ c\sec(x) & : \ |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:

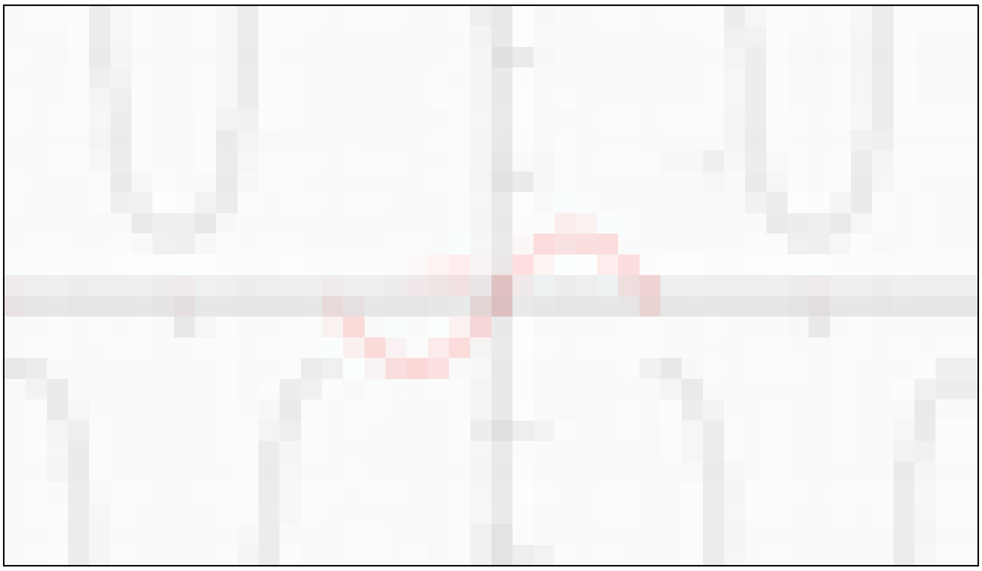


مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases} c\sec(x) & : \ |x|\le \pi \\ \sin x & : \ |x|>\pi \end{cases}$.

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



6- دالة ظل التمام $y = \cot x$

$$y = \frac{1}{\tan x} \qquad , \quad \tan x \neq 0$$

خواصها :

النطاق $\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \pm 3\pi , \pm 2\pi , \pm \pi\} - D \in IR$ أي :

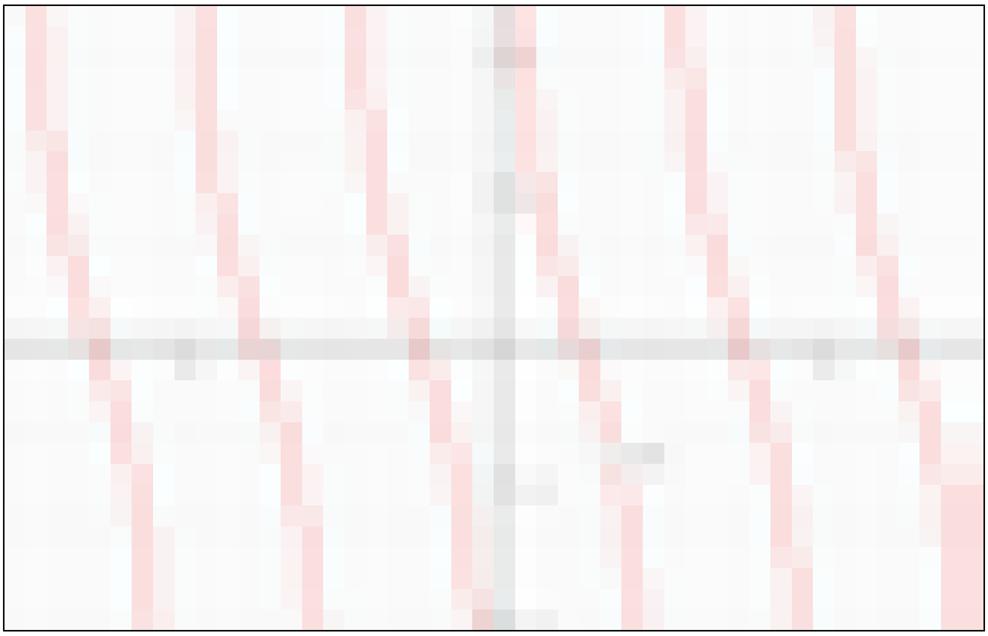
$$D_f = IR - \{n\pi\} \quad ; \quad n \in IZ$$

المدى هو $R_f = (-\infty , \infty)$.

الدالة فردية، وليست أحادية .

الدالة دورية ، ودورتها π أي أن : $\cot x = \cot(x + n\pi) \quad , \quad n \in IZ$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\tan x$	**كمية غير معرفة**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	**0**

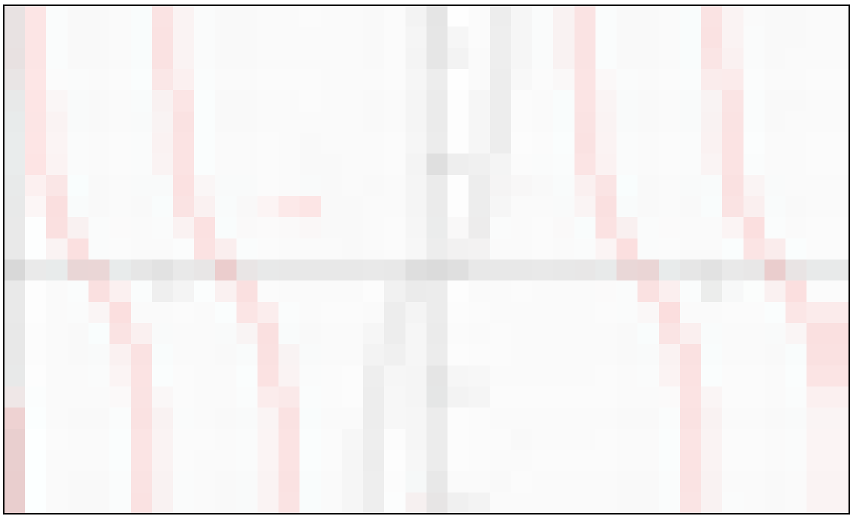


نلاحظ : أن الدوال المثلثية $\cot$, $\sec$, $c\sec$, $\tan$ هي دوال دورية لها دورة تساوي π.

مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\cot(x) & : \ |x|>\pi \\ x^3 & : \ |x|\le\pi\end{cases}$.

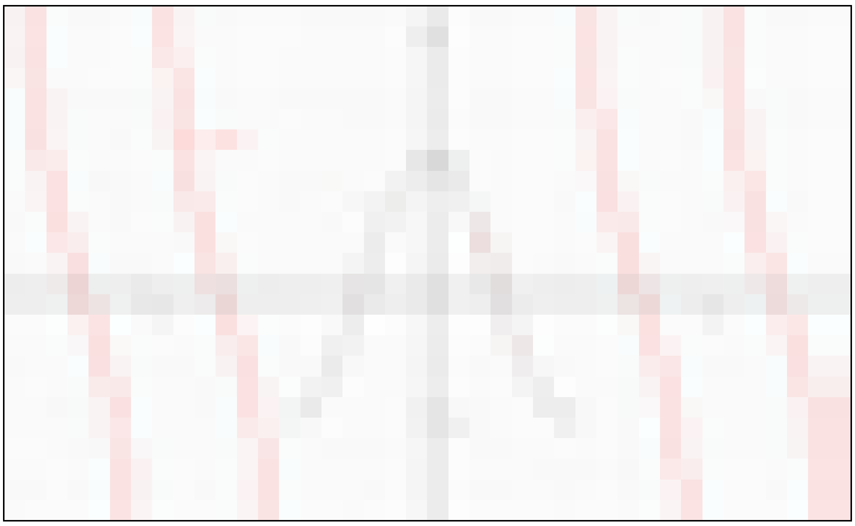
الحل: نقوم بحساب الدالة بذلك نحصل على الشكل على النحو التالي:



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\cot(x) & : \ |x|>\pi \\ \cos(x) & : \ |x|\le\pi\end{cases}$.

الحل: نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



بعض القوانين الأساسية للدوال المثلثية:

هناك بعض القوانين الهامة في الدوال المثلثية والتي منها:

1- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

3- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

4- $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

5- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

6- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$

7- $\cos(x \mp y) = \cos x \sin y \pm \sin x \sin y$

8- $\cos(\pi - x) = -\cos x \quad , \quad \sin(\pi - x) = \sin x$

9- $\tan(\pi - x) = -\tan x$

10- $\cot(\pi - x) = -\cot x$

11- $\cos(\pi + x) = -\cos x \quad , \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$

12- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

13- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

14- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

15- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

16- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$

17- $\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x$

18- $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad , \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

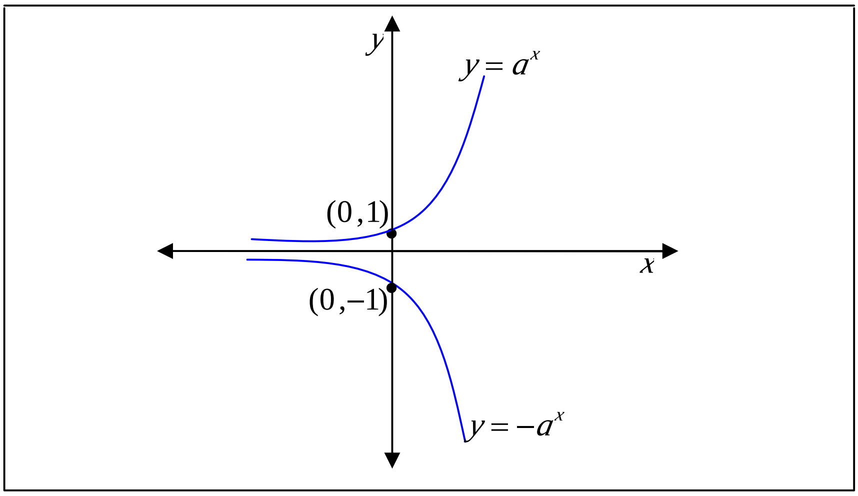
19- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

20- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

الدوال الأسية exponential functions

1- الدالة الأسية للأساس a :

هي الدالة من الشكل $y = a^x$ حيث a عدد حقيقي موجب و $a \neq 1$.



ملاحظة:

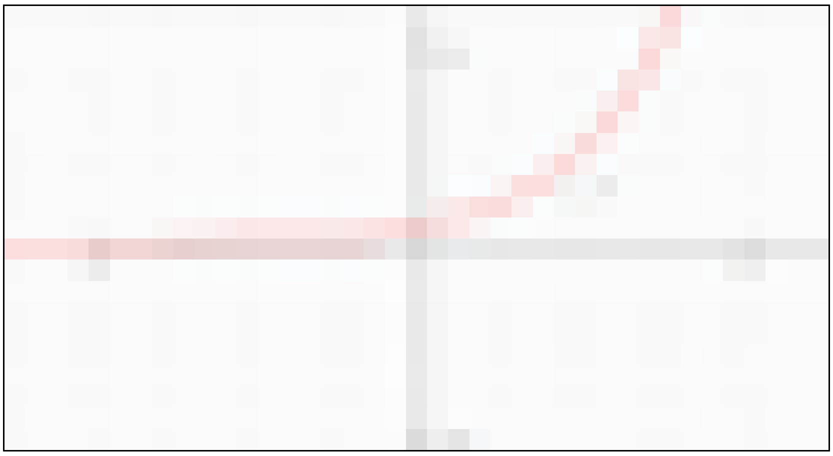
رسم أي دالة آسية $y = a^x$ يمر عبر النقاط . $C(1, a)$, $B(0,1)$, $A\left(-1, \frac{1}{a}\right)$

مثال :

وضح مع الرسم نطاق ومدى الدالة الآسية $y = 5^x$.

الحل:

واضح إن نطاق ومدى الدالة هو $D_f = (-\infty, \infty)$ و $R_f = (0, \infty)$

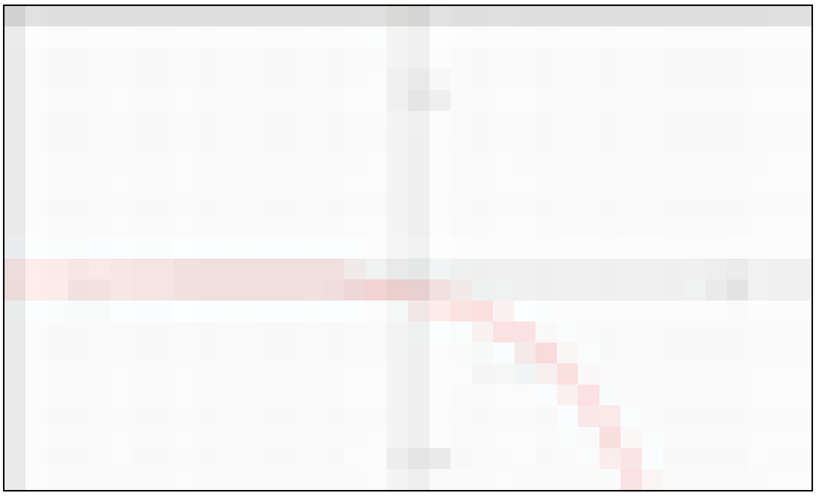


مثال :

وضح مع الرسم نطاق ومدى الدالة الآسية $y=-2^{x}$.

الحل:

من الواضح إن نطاق ومدى الدالة هو $D_f=(-\infty,\infty)$ و $R_f=(-\infty,0)$.

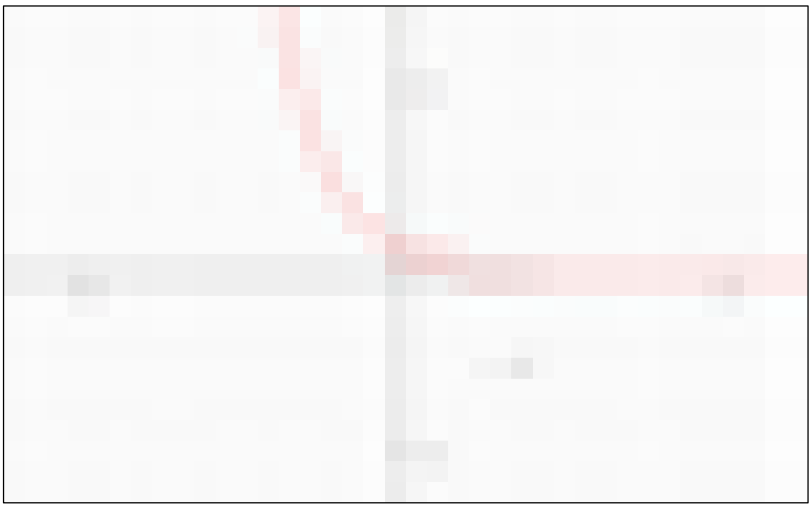


مثال :

وضح مع الرسم نطاق ومدى الدالة الآسية $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

الحل:

من الواضح إن نطاق ومدى الدالة هو $D_f=(-\infty,\infty)$ و $R_f=(0,\infty)$.



مثال:

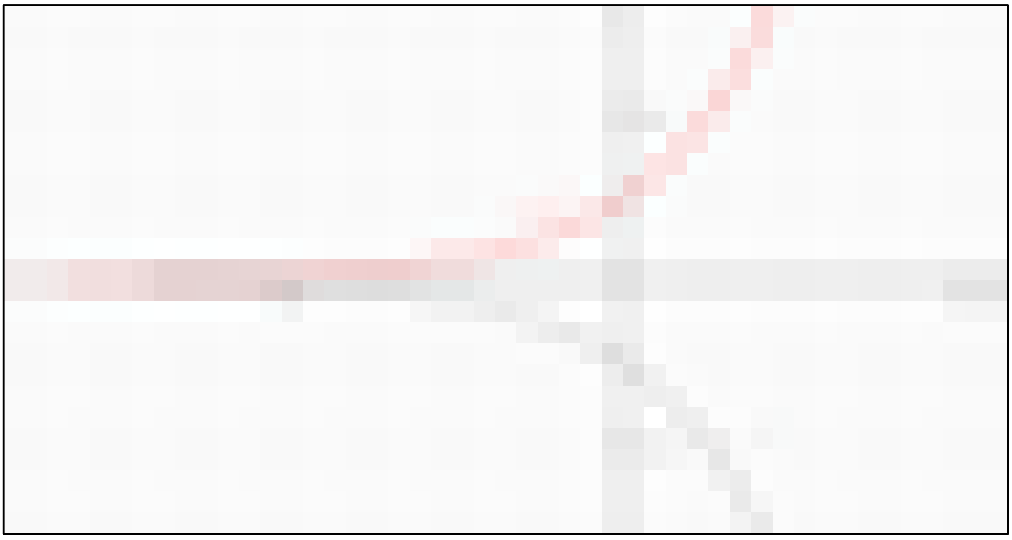
أرسم على الشكل ذاته كلاً من الدوال التالية: $f_1(x)=4^x$ **و** $f_3(x)=-4^x$

وأوجد نطاق ومدى كلاً منها .

الحل:

نطاق الدالة $f_1(x)=4^x$ هو $D_{f_1}=(-\infty,\infty)$ و ومداها $R_{f_1}=(0,\infty)$.

نطاق الدالة $f_3(x)=-4^x$ هو R و ومداها $R_f=(-\infty,0)$.



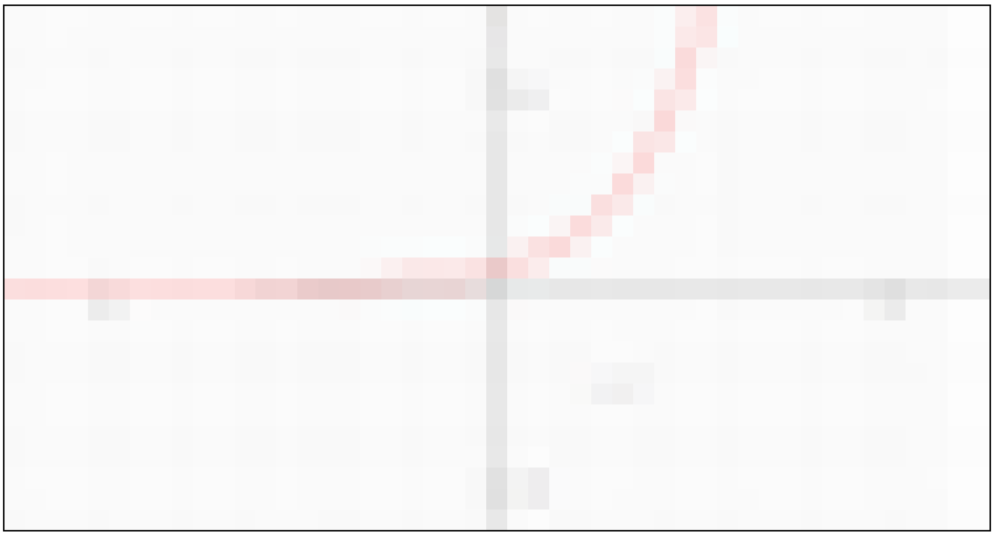
2- دالة الأساس الطبيعي :

يعرف العدد الطبيعي e كالآتي

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \textbf{أو} \quad e=\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

ويساوي على درجة التقريب .... e = 2.7182818

ودالة الأساس الطبيعي لها الشكل $y=e^x$ أي $y=\exp(x)$.

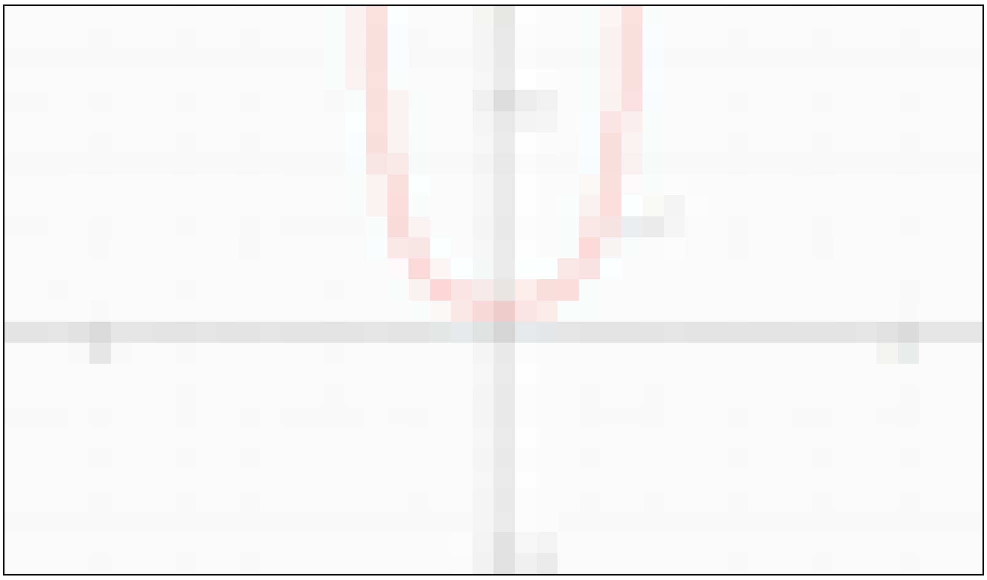


مثال :

أوجد نطاق ومدى الدالة $y = e^{x^2}$ مع رسم منحني الدالة.

الحل:

نطاق الدالة هو $D_f \in (-\infty , \infty)$ و مدى الدالة هو $R_f \in (1 , \infty)$.

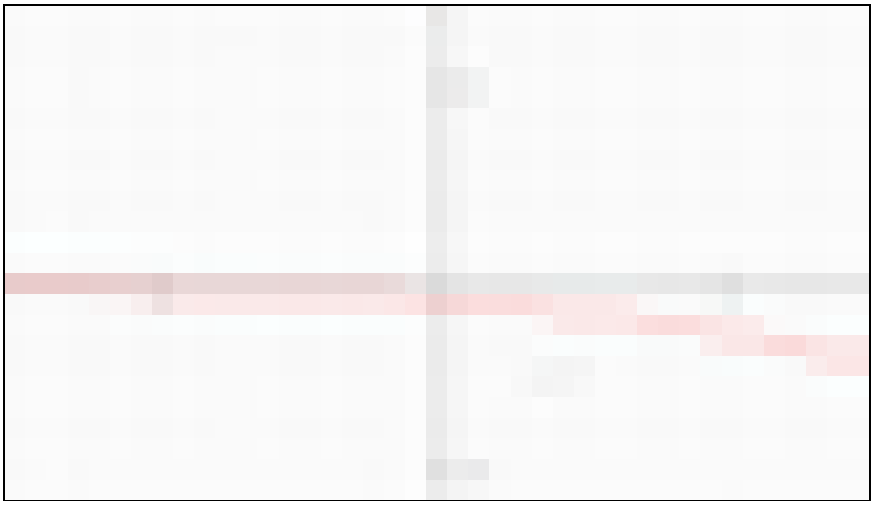


مثال :

أرسم منحني الدالة $y=-e^{x^2}$.

الحل:

نطاق الدالة هو $D_f \in (-\infty , \infty)$ و مدى الدالة هو $R_f \in (-\infty,-1)$.



مثال :

أرسم على الشكل ذاته الدالتين $f_1(x)=e^x$ $f_2(x)=3^x$ و قارن بينهما.

الحل:

من الواضح إن نطاق الدالة هو $D_{f_1}=R$ و مدى الدالة هو $R_{f_1}=(0,+\infty)$

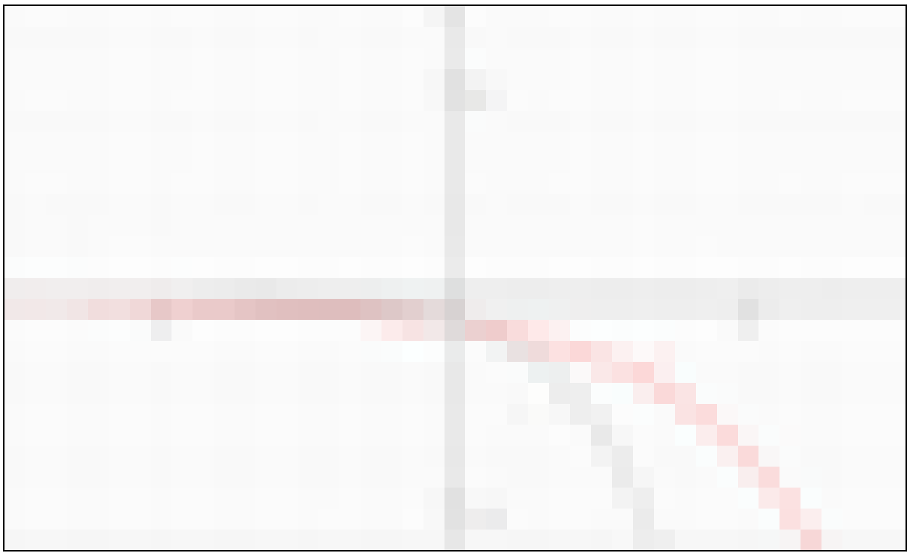
وكذلك نطاق الدالة هو $D_{f_2}=R$ و مدى الدالة هو $R_{f_2}=(0,+\infty)$.



مثال :

أرسم على الشكل ذاته الدالتين $f_1(x) = -e^x$ و $f_2(x) = -6^x$ و قارن بينهما.

الحل:



وبشكل عام إذا كان b, a عددان حقيقيان موجبان فإن $a^x > b^x \Leftarrow a > b$ من أجل $x > 0$

$a^x < b^x \Leftarrow a > b$ من أجل $x < 0$

وبالتالي فإن : $3 > e \Rightarrow f_1 > f_2 \; ; \; x > 0$

و $3 > e \Rightarrow f_1 < f_2 \; ; \; x < 0$

الدوال اللوغارثمية Logarithmic functions

تعريف:

إذا كان $a>0$ و $a\neq 1$ فإنا ندعو الدالة x الدالة $y=f(x)=\log_a x$ اللوغاريثمية ذات الأساس a وذلك يعني أن $x=a^y$:

ملاحظات:

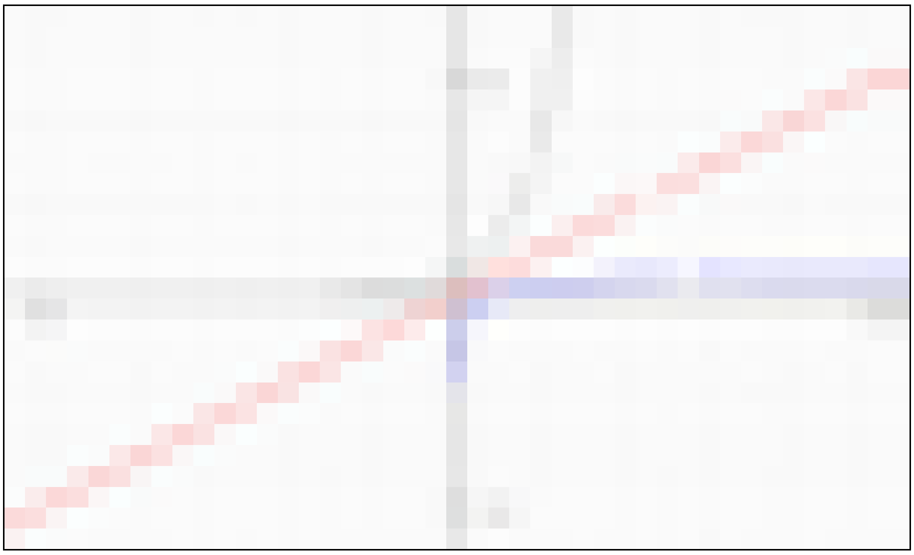
1-النطاق $D_f=(0,\infty)$

2-المدى $R_f=IR$

3-بيان أي دالة لوغاريتمية تمر عبر النقاط:

$$A\left(\frac{1}{a},-1\right) \quad , \quad B(1,0) \quad , \quad C(a,1)$$

4-بشكل عام الدالتان a^x ، $\log_a x$ دالتان متعاكستان .



مقارنة بين الدالة الآسية a^x والدالة اللوغاريثمية $\log_a x$:

الدالة الآسية a^x	اللوغاريثمية $\log_a x$
النطاق IR	النطاق $(0,\infty)$
المدى $(0,\infty)$	المدى IR
تمر بالنقاط $(1,0)$, $(0,1)$, $\left(-1,\frac{1}{a}\right)$	تمر بالنقاط $(a,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{a},-1\right)$

نلاحظ :

أن هناك تناظر (تماثل) بين الدالتين الآسية واللوغاريثمية بالنسبة لمنتصف الربع الأول لان الدالتين متعاكستان.

خواص اللوغريتمات :

1. قانون الضرب (الجداء): من أجل القيم الموجبة x ، y يكون :

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

2. قانون القسمة : من أجل القيم الموجبة x ، y يكون :

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

3. قانون القوى a و x عددان موجبان و $a > 0$ يكون :

$$\log_a a^x = x \quad , \quad a^{\log_a x} = x$$

ملاحظة:

إذا كان $a = 10$ عندها يدعى اللوغاريتم عشري ويكتب بلا أساس على الشكل $f(x) = \log x$ يكون:

$$y = \log x \quad \Rightarrow \quad x = 10^y$$

بعض القواعد المساعدة على حل المعادلات الآسية واللوغاريتمية:

1. إذا كان $x = y$ عندها $a^x = a^y$.
2. إذا كان، $a^x = a^y$ $a \neq 1$ عندها $x = y$.
3. إذا كان $x = y$ فإن $\log_a x = \log_a y$ حيث x, y موجبان و $a \neq 1$.
4. إذا كان $y = \log_a x$ فإن $x = a^y$.
5. إذا كان $\log_a x = \log_a y$ فإن $x = y$ بشرط $a \neq 1$.

الدالة اللوغارثمية للأساس e (دالة اللوغاريتم الطبيعي):

تعرف الدالة على النحو التالي: $f(x) = \log_e x$ و يعرف اللوغاريتم الطبيعي بالرمز $\ln(x)$ حيث :

- $\ln(x > 1) > 0$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(0 < x < 1) < 0$

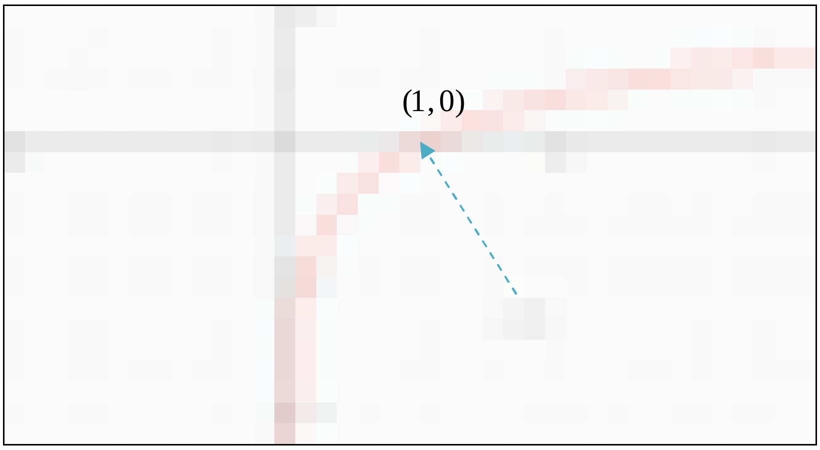
ولكن في حالة $x \leq 0$ تكون الدالة غير معروف.

ملاحظة:

لا يمكن التعويض بقيم سالبة في الدالة اللوغارثمية لأنها تعطي كمية غير معرفة.

صورة الدالة اللوغارثمية:

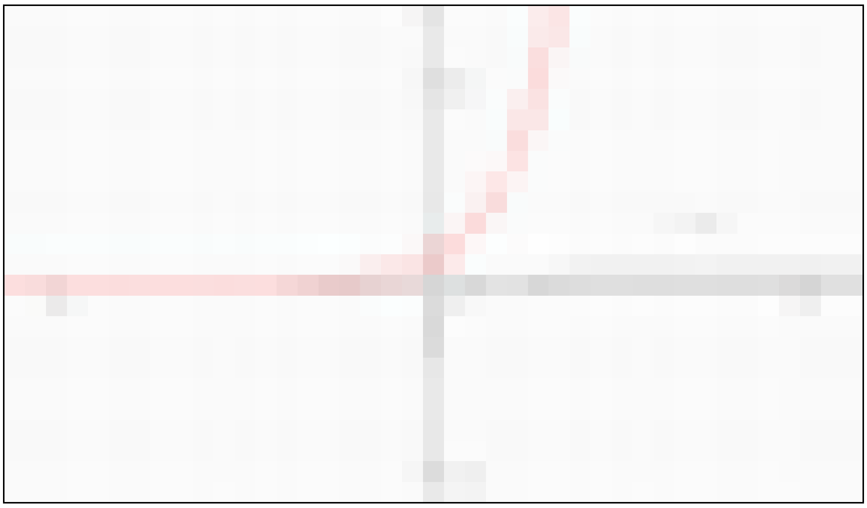
هي $y=\ln x$ نطاقها هو $D\in(0\,,\infty)$ ومداها هو $Range\in(-\infty,\infty)$ و تأخذ الشكل التالي:



مثال :

أرسم منحني الدالة $y=5^x$ و $y=\ln 5$.

الحل:



الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

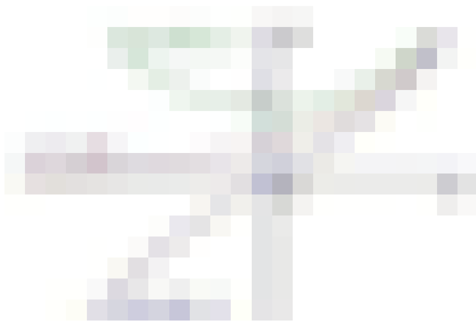
يعبر عن الدوال الزائدية بدلالة الدوال الآسية e^{x} و e^{-x} وهي مشابهة في خواصها لحد كبير للدوال المثلثية ولذلك تسمى بأسماء مشابهة للدوال المثلثية وهذه الدوال معرفة كالتالي:

$$\sinh : R \to R \quad , \quad x \to \frac{e^{x} - e^{x}}{2}$$

أما دالة جيب التمام الزائدي تعرف على الشكل التالي :

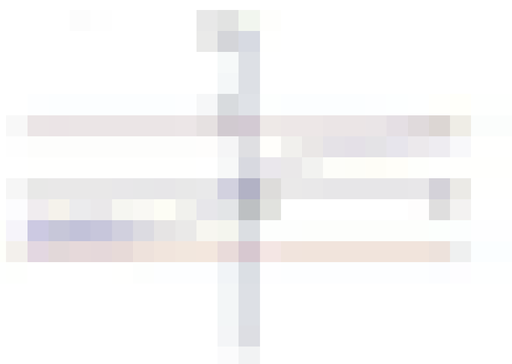
$$\cosh : R \to R \quad , \quad x \to \frac{e^{x} + e^{x}}{2}$$

الشكل التالي يوضح الدالتين $\sinh x$ و $\cosh x$:



وكذلك دالة الظل الزائدي تعرف على الشكل التالي :

$$\tanh : R \to R \quad , \quad x \to \frac{\sinh}{\cosh} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$



أما باقي الدوال تعرف على الشكل التالي:

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sec h(x) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$c\sec h(x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

بعض خواص الدوال الزائدية:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$$

$$\coth^2 x - c\sec h^2 x = 1$$

وهذا الخواص يمكن استنتاجها من التعاريف التالية:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \Rightarrow \sinh x$$ دالة فردية

$$\cosh(-x) = \cosh x \Rightarrow \cosh x$$ دالة زوجية

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

وبوضع $x = y$ نحصل على المتطابقات التالية:

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

إذا يمكن كتابة المعادلات التالية:

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

الدوال المتناظرة: symmetric functions

هناك ثلاثة أنواع من التماثل(التناظر):

1-التماثل(التناظر) حول المحور y:

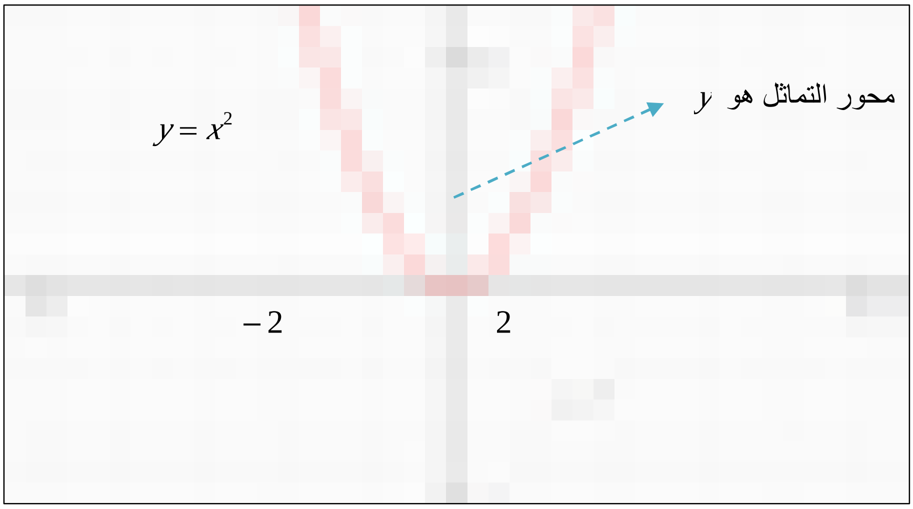
إذا عوضنا في أي دالة بالمتغير $(-x)$ بدلا من (x)،وكان الناتج هو الدالة ذاتها؛ فيقال عن هذه الدالة أنها متماثلة(متناظرة) حول المحور y .

فمثلاً:

من أهم الدوال المتماثلة(المتناظرة) حول المحور y هي $y=x^2$.

$$y=x^2 \leftrightarrow y=(-x)^2$$

$$y=x^2=(-x)^2$$



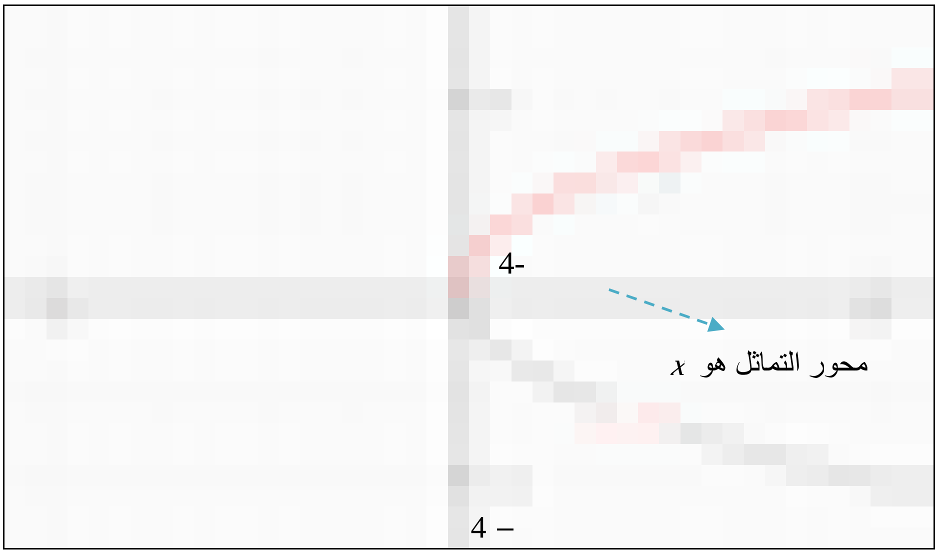
إذا الدالة متماثلة(متناظرة) حول المحور y

2- التماثل (التناظر) حول المحور X .

إذا عوضنا بالمتغير $(-y)$ بدلا من المتغير (y) في أي دالة وكان الناتج هو الدالة ذاتها؛ فيقال عن هذه الدالة أنها متماثلة(متناظرة) حول المحور X .

فمثلاً:

من أهم الدوال المتماثلة حول المحور X هي $y=x^2$ أي أن : $x=y^2$ ومنها $(-y)^2=y^2=x$.



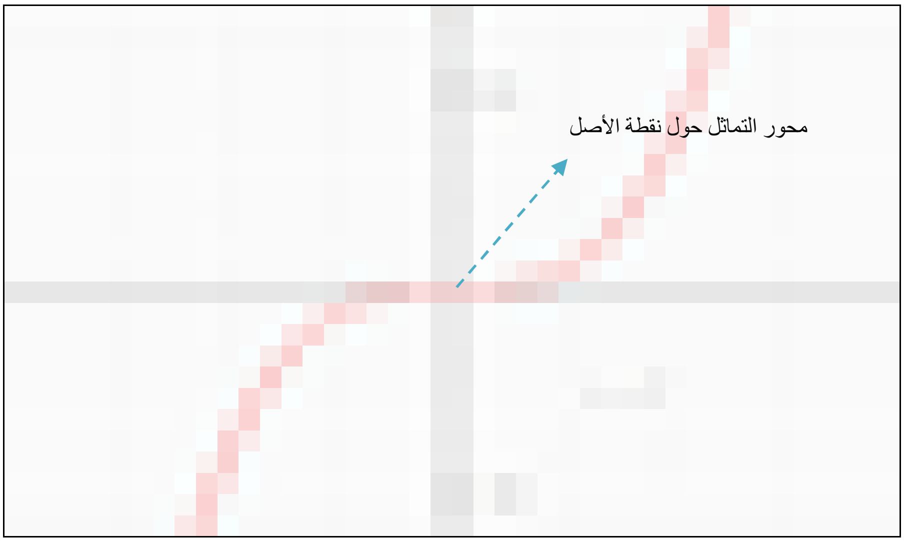
3-التماثل(التناظر) حول نقطة الأصل:

إذا عوضنا بالمتغير $(-x)$ بدلا من (x)وكذلك بالمتغير $(-y)$ بدلا من (y)، وكان الناتج الدالة ذاتها؛ فيقال أن الدالة متماثلة (متناظرة) حول نقطة الأصل .

فمثلاً:

من أهم الدوال المتماثلة (المتناظرة) حول نقطة الأصل هي $y = x^3$.

$$y = x^3 \rightarrow -y = (-x)^3$$
$$y = x^3 \rightarrow -y = -x^3$$



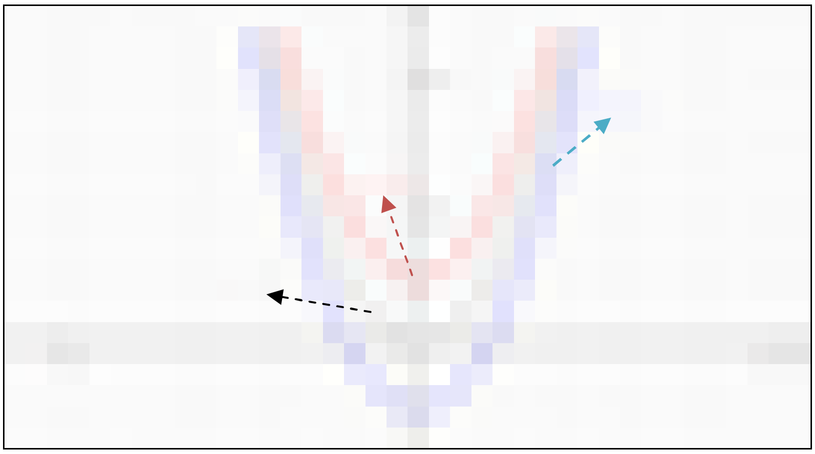
استخدام التحويلات الخطية Use of liner transformations

نعلم أن بيان دالة $f(x)$ يعطي صورة واضحة عن الدالة ويسهل دراستها والتحويلات الخطية تسهل رسم هذا البيان وهي الإزاحة والتمدد والانضغاط والانكماش.

1- الإزاحة Shift

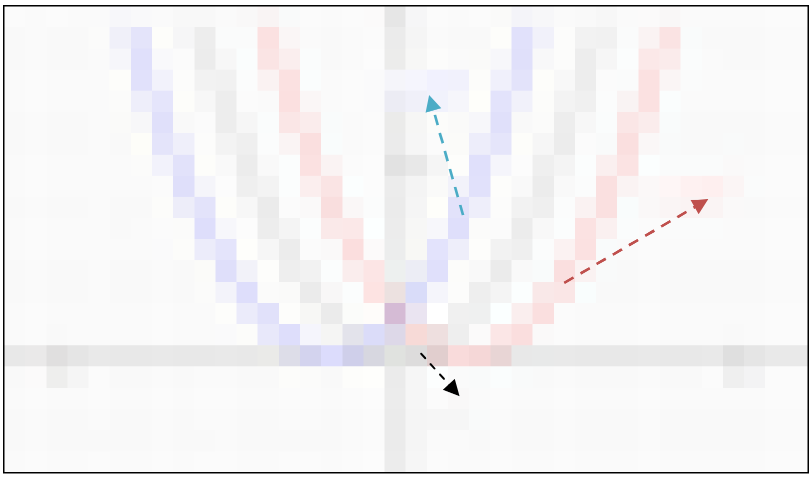
أ- الإزاحة الراسية Vertical shift :

يسبب إضافة أو طرح مقدار ثابت موجب C لقيمة الدالة $f(x)$ إزاحة رأسية فالإضافة تزيح الدالة للأعلى مسافة C والطرح يزيح المنحنى للأسفل مقدار C كما يوضح الشكل التالي:



ب- الإزاحة الأفقية Horizontal shift :

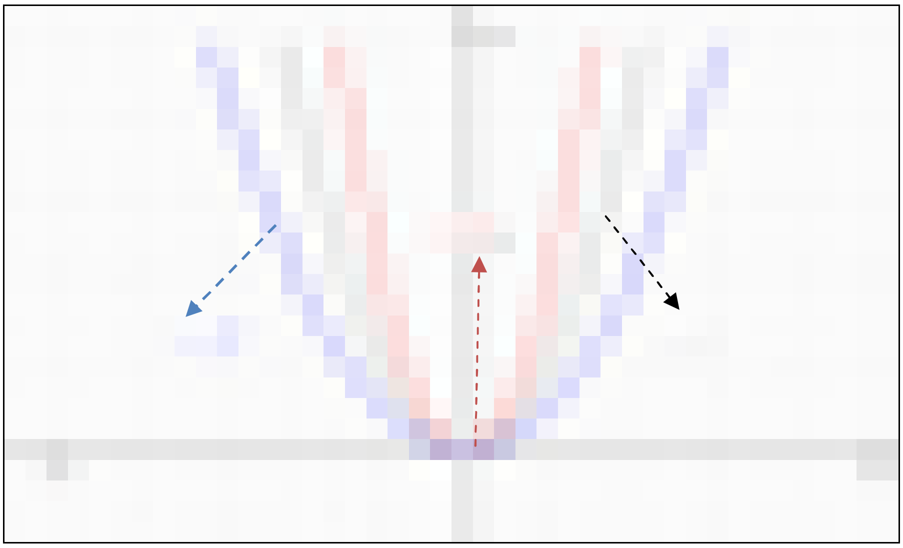
تؤدي الإزاحة الأفقية $f(x+c)$ إلى إزاحة المنحنى $f(x)$ لليسار وتؤدي الإزاحة الأفقية $f(x-c)$ إلى إزاحة المنحنى $f(x)$ لليمين كما يبين الشكل التالي (إذا كان $c>0$):



2- التمدد والانضغاط : Stretch and compression

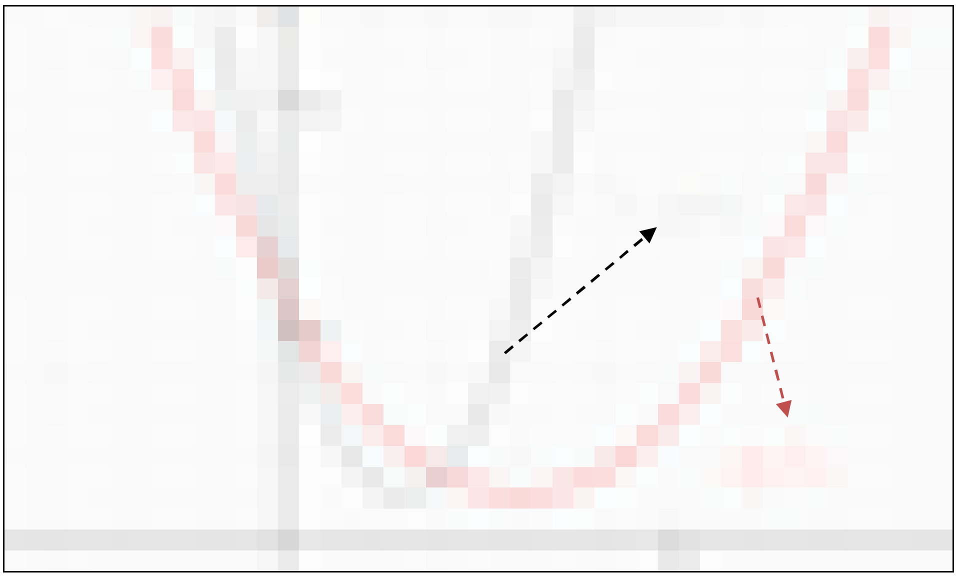
أ-التمدد والانضغاط الراسي Vertical stretch and retrial compression

إذا ضربنا قيم الدالة $f(x)$ بمقدار ثابت C نحصل على تمدد راسي عندما تكون $C>1$ وانضغاط راسي عندما $0<C<1$ كما يبين الشكل التالي:



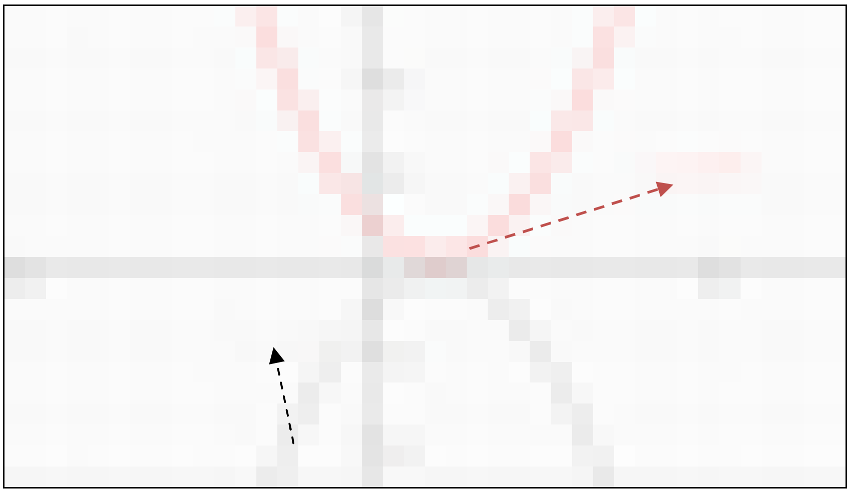
ب-التمدد والانضغاط الأفقي: Horizontal stretch and compression

إن بيان $f(\frac{x}{c})$ هو تمدد أو انضغاط أفقي بنسبة C كما يبين الشكل التالي:

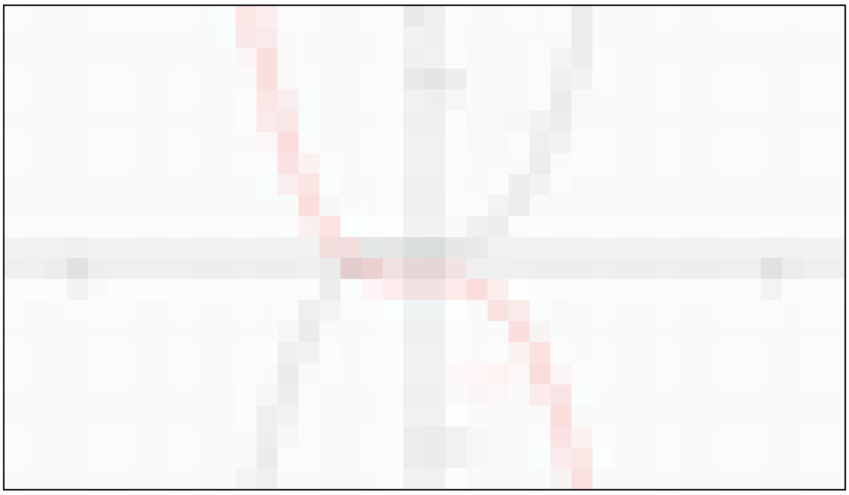


2- الانعكاس: Reflection

مجموعة الدوال $y=(x-a)^2+b$ وهي مجموعة القطوع المكافئة التي ذروتها في النقطة $(a,-b)$ حيث تمثل هذه النقطة أدنى نقطة من هذه المنحنيات أي أن:
$y\geq b$ عندما $y=b$ و $-\infty\leq x\leq\infty$ هو حد أدنى لهذه الدوال .
كذلك فإن مجموعة الدوال $y=-(x-a)^2+b$ هي انعكاس لمجموعة القطوع تلك وبالتالي فهي محدودة من الأعلى وتمثل النقطة (a,b) ذروتها العليا أي أن:
$y=-b$ و هو حد أعلى لهذه الدوال .
يقال عن الدالة $y=-f(x)$ انعكاس للدالة $f(x)$ عبر المحور $0X$ كما يبين الشكل التالي:



وكذلك الشكل التالي:



الدالة العكسية : Inverse function

إذا كانت $f : x \to y$ دالة تقابلية (أحادية) فتسمى الدالة $g : y \to x$ بالدالة العكسية للدالة f ،بشرط أن $fog = I_y \quad , \quad gof = I_x$ ، وفي هذه الحالة تكتب $g = f^{-1}$.

لاحظ أنه إذا كانت f ليست تقابلية؛ فإن f^{-1} لا تمثل دالة ، وللحصول على معكوس الدالة نتبع الخطوات التالية :

1. نتأكد من أن الدالة تقابلية ، ونحدد نطاقها ومداها .
2. نضع الدالة على الصورة الصريحة في المتغير y أي نكتبها على الشكل $x= g(y)$.
3. نضع x بدلا من y ، ونضع y بدلا من x فنحصل على معكوس الدالة $y= g(x)$

مثال :

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 3x+1$

الحل :

1- واضح أن الدالة تقابلية لأنها متباينة و غامرة ونحدد نطاقها ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية.

2- نضع y بدلا من $f(x)$ أي أن $x= 3y+1$

3- نوجد x بدلالة y أي أن $x = \dfrac{y-1}{3}$

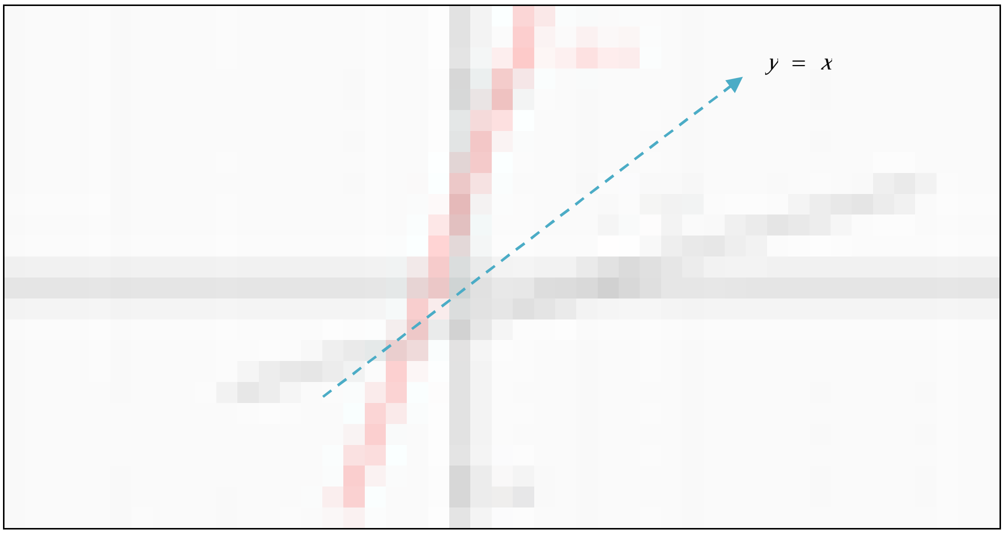
4- نضع $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$

5-نضع x بدلاً من y أي أن: $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

لتتأكد من عملك أوجد fog و gof كلاهما يجب أن يساوي x . كما في الشكل التالي:

واضح أن $fog(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-1}{3}\right)$ منها نحصل على $fog(x) = 3\left(\dfrac{x-1}{3}\right)+1 = x$

وكذلك $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x+1)$ منها نحصل على $gof(x) = \dfrac{3x+1-1}{3} = x$



مثال :

أوجد الدالة العكسية للدالة $f : D_f \to R_f$ حيث $f(x)=\sqrt{2x-3}$.

الحل :

يجب أن نبرهن أن الدالة تقابلية؛ بما أن الدالة $f(x)=\sqrt{2x-3}$ فإن نطاقها $D_f=\{x:2x-3\geq 0\}=\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ أي أن $D_f=\left\{\frac{3}{2}\leq x\leq\infty\right\}$ منه $3\leq 2x\leq\infty$

وبذلك تصبح $\frac{3}{2}\leq x\leq\infty$ ومنها $R_f=[0,\infty)$

نتحقق من أن الدالة تقابلية $\in D_f$ x_1,x_2 $\forall$ بحيث

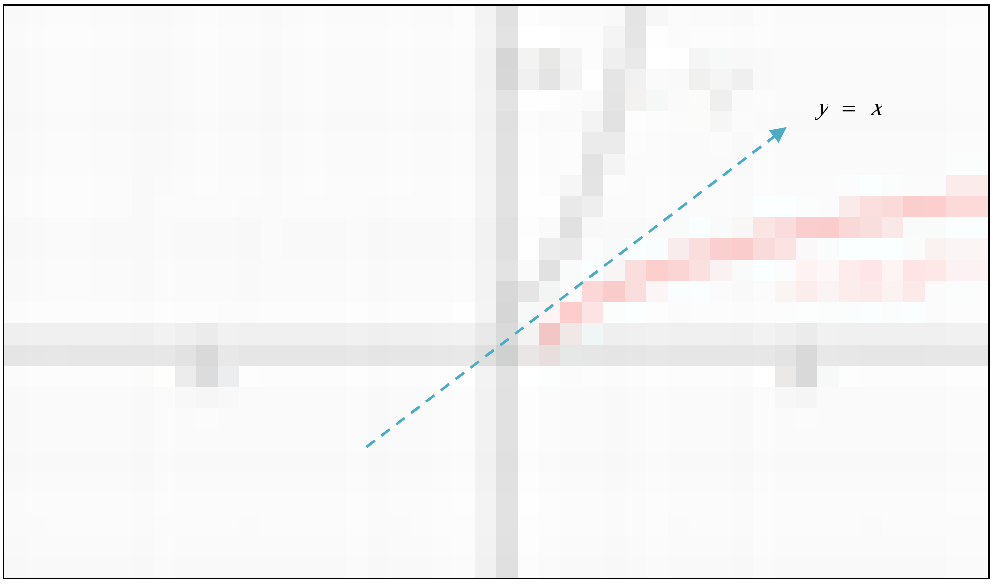
منها $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{2x_1-3}=\sqrt{2x_2-3}$

$2x_1-3=2x_2-3\Rightarrow x_1=x_2$ بذلك تكون f متباينة وغامرة إذا f تقابلية.

نربع طرفي المعادلة نحصل على $y^2=2x-3$ نوجد x بدلالة المتغير y فيكون لدينا

$$x=\frac{y^2+3}{2}$$

منها $f^{-1}(y)=\frac{y^2+3}{2}$ بتعويض عن y بـــ x فنحصل على $f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{2}$



ملاحظة:

بيان رسم الدالة العكسية للدالة f يناظر بيان الدالة f بالنسبة للمستقيم $x = y$ منصف الربع الأول (صورة f عبر المستقيم $x = y$) .

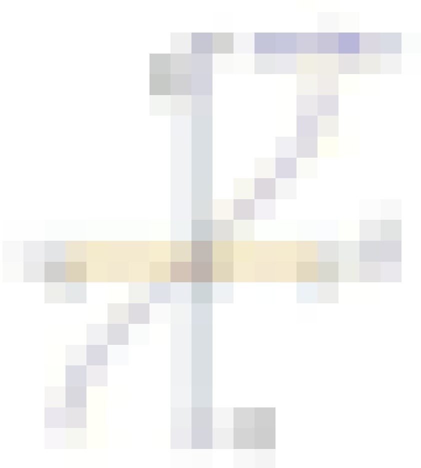
الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric functions

1- الدالة العكسية للدالة sin $(\arcsin x)$:

بفرض أن $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ عندئذ نعرف الدالة العكسية للدالة المثلثية sin على الشكل التالي:

$$\sin^{-1} x = y \Leftrightarrow x = \sin y$$

وعندها يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ومنها تكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ وكذلك $\sin(\sin^{-1} x) = x$ ،كما أن $-1 \le x \le 1$ كما هو موضح بالشكل التالي:



مثال:

أحسب قيمة $x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

الحل:

بالتأثير بالدالة sin على طرفي المعادلة $x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في نحصل على :

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \sin(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)) \Rightarrow \sin x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ منها $x = \frac{\pi}{3}$

مثال:

إذا كان $y=\sin^{-1}(x^2-1)$ فأوجد نطاق الدالة $f(x)$.

الحل:

بما أن الدالة المثلثية محدودة ضمن المجال $[-1,1]$ فإن نطاق الدالة المدروسة هو :

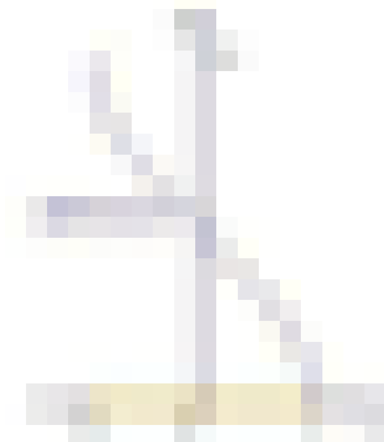
$$\{x: \quad -1\le x^2-1\le 1\}=\{x: \quad 0\le x^2\le 2\}$$
$$=\{x: \quad -\sqrt{2}|x|\le\sqrt{2}\}$$
$$=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

2- الدالة العكسية للدالة cos $(\arccos x)$:

بفرض أن $0\le x\le\pi$ عندئذ نعرف الدالة العكسية للدالة المثلثية cos على الشكل التالي:

$$\cos^{-1}x=y\Leftrightarrow x=\cos y$$

وعندها يكون $\cos^{-1}(\cos x)=x$ ومهنا تكون $0\le x\le\pi$ وكذلك $\cos(\cos^{-1}x)=x$ كما أن $-1\le x\le 1$ كما هو موضح بالشكل التالي:



مثال:

أحسب قيمة $x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

الحل:

بالتأثير بالدالة cos على طرفي المعادلة $x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في نحصل على:

بضرب طرفي المعادلة في نحصل على :

$$x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \cos x=\cos(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right))\Rightarrow \cos x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ منها $x=\frac{\pi}{6}$

مثال:

إذا كان $y=\cos^{-1}(x^2-2)$ فأوجد نطاق الدالة $f(x)$.

الحل:

بما أن الزاوية $(1\le x^2-2\le 1)$ بذلك يكون لدينا $1\le x^2\le 3$ بذلك تكون قيمة x على النحو التالي $\pm 1\le |x|\le\sqrt{3}$ منها يكون لدينا :

$x\ge 1$ أو $x\le -1$ و $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ هذا يؤدي إلى

$x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ و $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ منها نحصل على :

$$x\in\left(-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right)$$

3- الدالة العكسية للدالة $\tan(\arctan x)$:

بفرض أن $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ عندئذ نعرف الدالة العكسية للدالة المثلثية $\tan$ على الشكل التالي:

$$\tan^{-1}x=y\Leftrightarrow x=\tan y$$



4- بشكل مشابه نعرف الدوال العكسية التالية:

- إذا كان $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ فإن :

$$y=c\sec^{-1}x \quad , \quad |x|\ge 1\Leftrightarrow x=c\sec y$$

$$y=\sec^{-1}x \quad , \quad |x|\ge 1\Leftrightarrow x=\sec y$$

- إذا كان $y\in(0,\pi)$ فإن : $y=\cot^{-1}x\Leftrightarrow x=\cot y$

مثال:

أحسب قيم الدوال التالية:

1: $y=\cos\left[\tan^{-1}(-1)+\tan(1)\right]$

2: $y=\tan^{-1}\sqrt{3}+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل:

أولا: نوجد قيمة $y=\cos\left[\tan^{-1}(-1)+\tan(1)\right]$ على الشكل التالي:

$\left(y_1=\tan^{-1}(-1)\Rightarrow \tan y_1=-1\right)$ منها $y_1=-\frac{\pi}{4}$

$\left(y_2=\tan^{-1}(1)\Rightarrow \tan y_2=1\right)$ منها $y_2=\frac{\pi}{4}$ بتعويض عن y_1 و y_2 في

$$\cos\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]=\cos(0)=1$$

ثانيا: نوجد قيمة $y=\tan^{-1}\sqrt{3}+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ على الشكل التالي:

$\left(y_1=\tan^{-1}(\sqrt{3})\Rightarrow \sqrt{3}=\tan y_1\right)$ منها $y_1=\frac{\pi}{3}$

$\left(y_2=\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin y_2\right)$ منها $y_2=-\frac{\pi}{4}$ بتعويض عن y_1 و y_2 في

$$y=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions

تعرف الدوال الزائدية العكسية بدلالة الدوال اللوغارثمية كالآتي:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \forall x$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad \forall |x| \ge |1|$$

$$\sec h^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad , \quad o < x \le 1$$

$$\csc h^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right) \quad , \quad x \ne 0$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad , \quad |x| > 1$$

مثال:

برهن أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

الحل:

نعلم بأن : $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ وبالتالي:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

مثال:

برهن أن $\tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$.

الحل:

نعلم بأن : $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ و $\sec hx = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ منها

$$\tanh^2 x + \operatorname{sec}h^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{e^{2x} - 2 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} = 1$$

مثال:

برهن أنه $\forall x \quad , \quad \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

الحل:

بفرض أن $y = \sinh^{-1} x$ عندها $\sinh y = x$ ومن تعريف $\sinh y$ يكون

لدينا : بالتعويض $\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ في الطرف الثاني من العلاقة السابقة نحصل على :

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \ln\left(e^y\right) = y = \sinh^{-1} x$$

مثال:

برهن أنه $|x| \geq 1 \quad , \quad \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

الحل:

بفرض أن $y = \cosh^{-1} x$ عندها $\cosh y = x$ ومن تعريف $\sinh x$ يكون لدينا :

$x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ وبالتعويض في الطرف الثاني من العلاقة السابقة نحصل على:

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}-1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)\right)$$

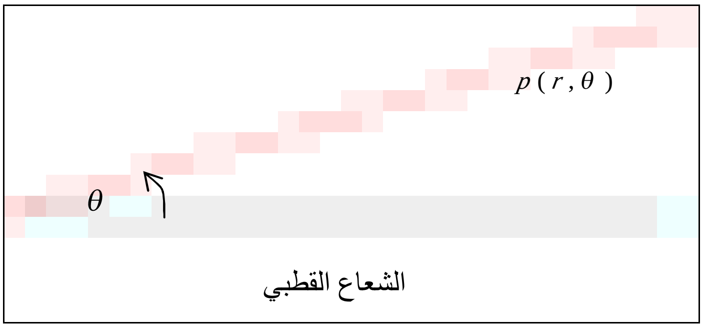
$$=\ln\left(e^y\right)=y=\cosh^{-1}x$$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

لتمثيل نقطة بالإحداثيات القطبية نثبت نقطة الأصل، والتي تسمى بالقطب، وشعاع أوله نقطة الأصل ، ونهايته النقطة الممثلة ، والذي يسمى بالشعاع القطبي .

والنقطة p تمثل الإحداثيات القطبية (r,θ) حيث أن :

r هو المسافة من القطب إلى النقطة p و θ هي الزاوية المحصورة بين الشعاع القطبي والشعاع op.



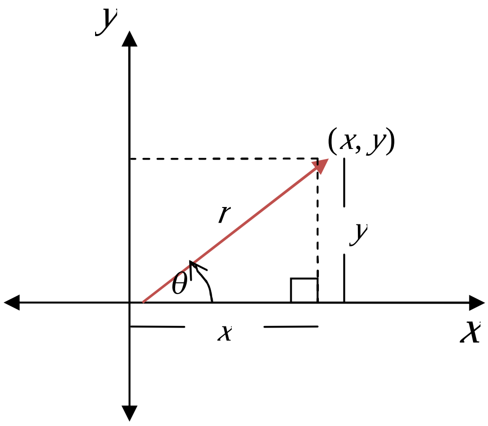
ملاحظات:

1. تكون الزاوية موجبة إذا تحركنا في اتجاه عكس عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت حركتنا مع اتجاه عقارب الساعة.
2. عند إضافة N من الدورات فإن الزاوية لا تتغير وبالتالي نحصل على تمثيل أخر للنقطة نفسها .
3. عند طرح N من الدورات فإن الزاوية لا تتغير وبالتالي نحصل على تمثيل جديد للزاوية .

العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الكارتيزية

Relation Between Polar and Cartesian Coordinates

من الرسم نجد أن:



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(من نظرية فيثاغورث)}$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow (1)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \rightarrow (2)$$

نستخدم المعادلتين 1،2 لتحويل الإحداثيات الكارتيزية إلى إحداثيات قطبية .

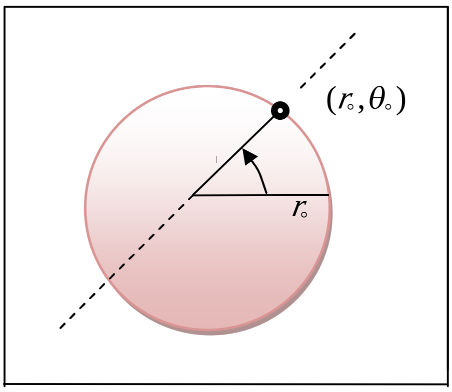
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \rightarrow \quad x = r\cos\theta \quad \rightarrow (3)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \rightarrow \quad y = r\sin\theta \quad \rightarrow (4)$$

وكذلك نستخدم المعادلتين 3 ، 4 لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات كارتيزية.

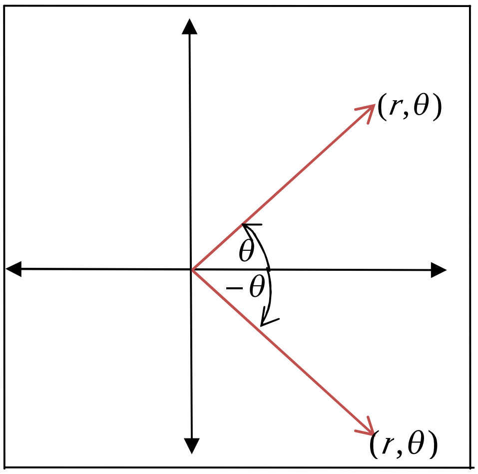
ملاحظة:

لتعيين نقطة $(r_\circ, \theta_\circ)$ نرسم دائرة نصف قطرها $r_\circ$ ومستقيم يصنع مع المحور الأفقي زاوية قدرها $\theta_\circ$ ثم نعين تلك النقطة كما بالشكل أسفلة .

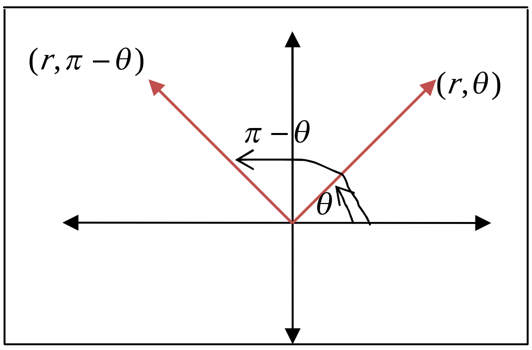


التناظر في الإحداثيات القطبية: Symmetric In Polar Coordinates

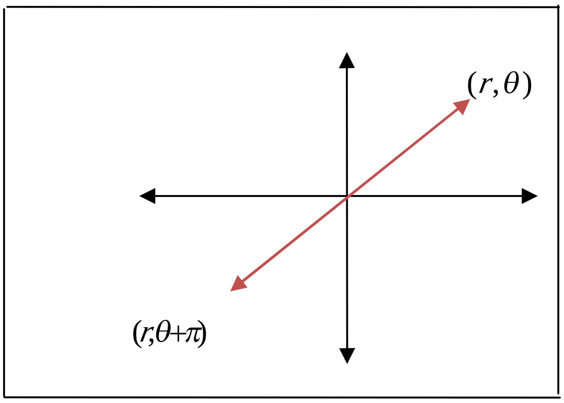
1. تكون المعادلة متماثلة حول المحور القطبي إذا لم تتغير المعادلة القطبية عند استبدال $(\theta$ بـ $-\theta)$ وبالتالي يمكن رسم المعادلة المتناظرة حول المحور القطبي بأخذ الزاوية θ من $0^\circ \leftarrow 180^\circ$ وعكس الرسم الناتج .



2. تكون الدالة متناظرة حول المحور y أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا لم تتغير المعادلة القطبية عند استبدال $(\theta$ بـ $\pi-\theta)$ وبالتالي عند رسم المعادلة القطبية المتناظرة حول $\theta = 90^\circ$ نحتاج لرسم المعادلة بالربع الأول والربع الثالث وعكس الرسم .



3. تكون الدالة متناظرة حول القطب إذا لم تتغير المعادلة عند استبدال θبـــ $\theta+\pi$ كما بالشكل :



قاعدة :

رسم أي معادلة من النوع $r=c$ هو دائرة نصف قطرها c ، ومركزها نقطة الأصل .

$$r=c$$
$$\because \quad r^2=x^2+y^2$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$c^2=x^2+y^2$$

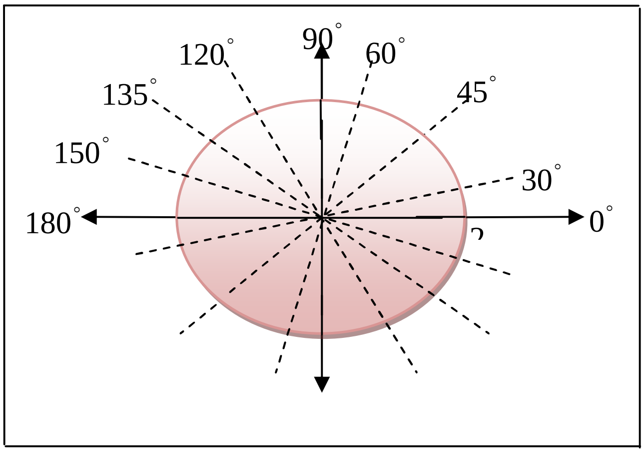
وهى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها c .

مثال : ارسم المعادلة القطبية $r=2$.

الحل :

أولاً نكون الجدول التالي ثم نرسم لنحصل على الدائرة الموضحة أسفلة :

θ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	2	2	2	2	2	2	2	2

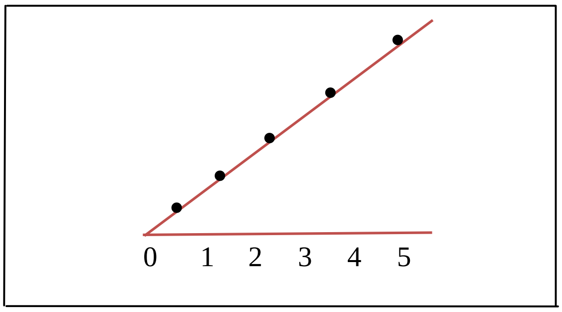


مثال : ارسم المعادلة القطبية $\theta = 45^\circ$.

الحل :

أولاً نكون الجدول التالي ثم نرسم لنحصل على الدائرة الموضحة أسفلة:

θ	45°	45°	45°	45°	45°	45°	45°	45°
r	0	1	2	3	4	5	6	7



مثال :

ارسم المعادلة القطبية $r = \cos\theta$.

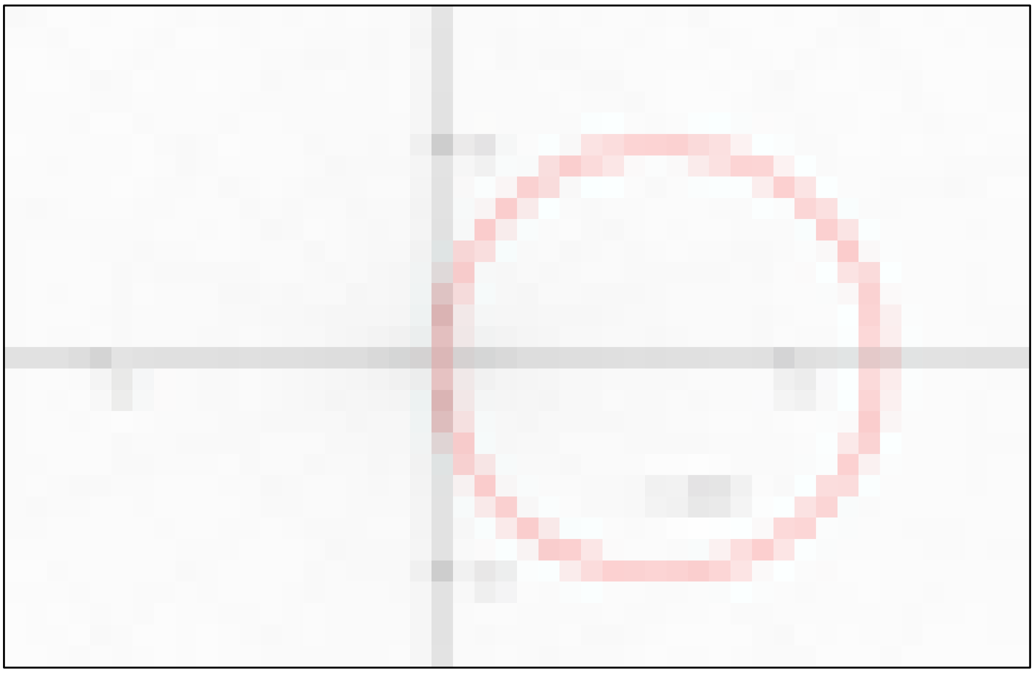
الحل :

$$\because \quad \cos\theta = \cos(-\theta)$$

$\therefore$ نرسم المعادلة القطبية بأخذ الزوايا من $0^\circ \leftarrow 180^\circ$، ونعكس الرسم الناتج حول المحور القطبي .

نكون الجدول التالي أولاً:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	1	0.866	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707	-0.866	-1

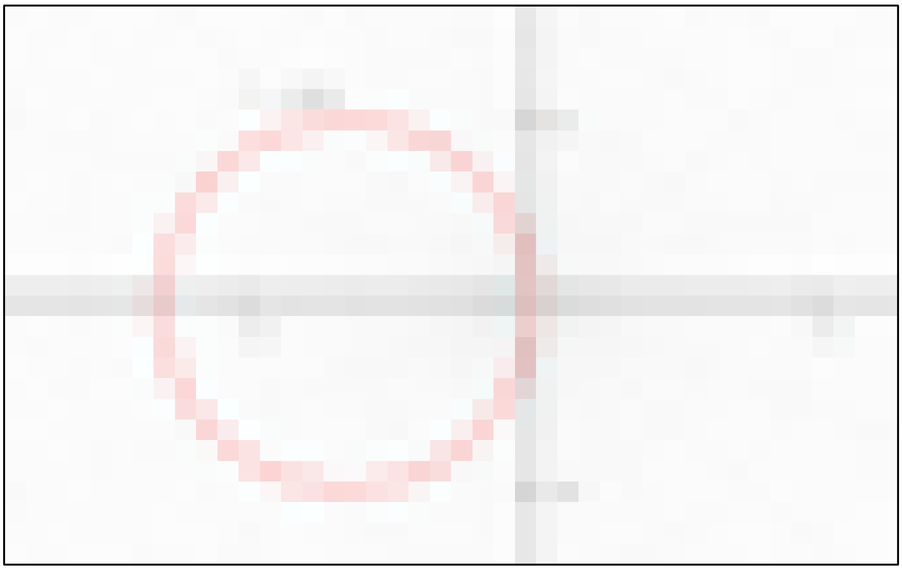


قاعدة1:

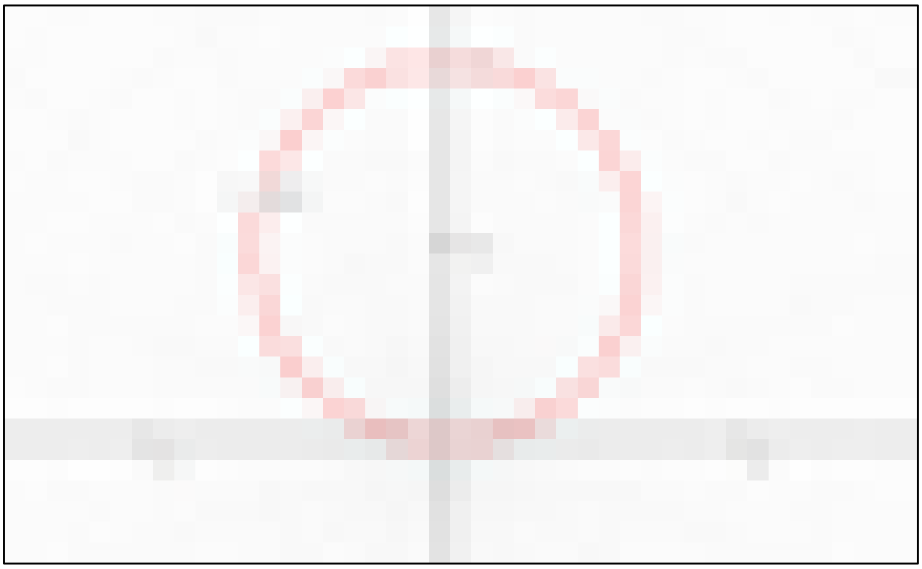
أي معادلة من النوع $r = a\cos\theta$ هي دائرة متناظرة حول المحور القطبي مركزها $(0.5a,0)$ ونصف قطرها $0.5a$

قواعد 2:

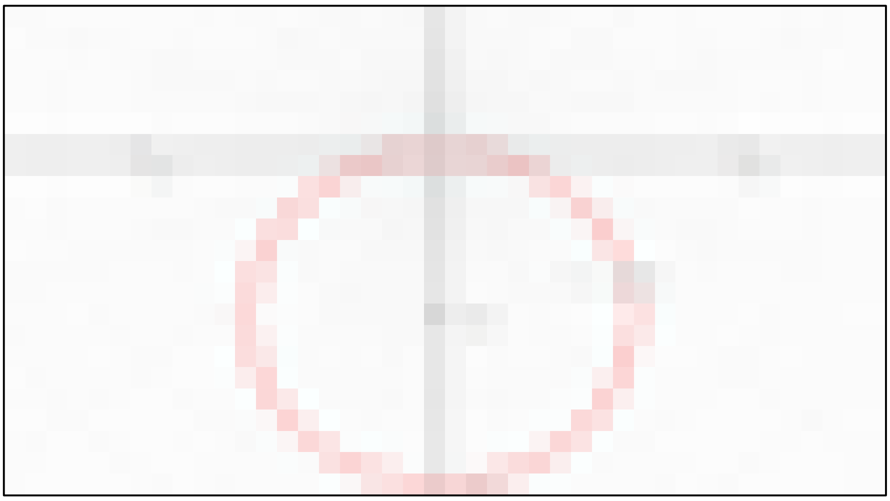
1- منحنى الدالة القطبية $r=-a\cos\theta$ هو دائرة مركزها $(-0.5a,0)$ ونصف قطرها 0.5.



2- منحنى الدالة القطبية $r=\sin\theta$ هو دائرة في الجهة العليا متناظرة حول الزاوية $\theta=90^{\circ}$ ونصف قطرها 0.5 ومركزها $(0.5,0)$



3- منحنى الدالة القطبية $r=-\sin\theta$ يكون دائرة في الجهة السفلى متناظرة حول الزاوية $\theta=-90^\circ$ ونصف قطرها 0.5 ومركزها $(-0.5,0)$.

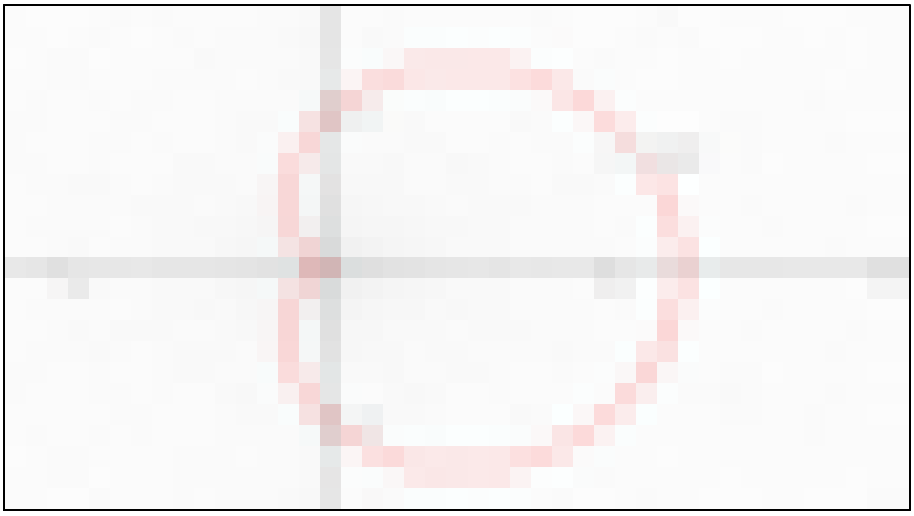


مثال :

ارسم المعادلة القطبية $r=1+\cos\theta$.

الحل : نكون الجدول التالي:

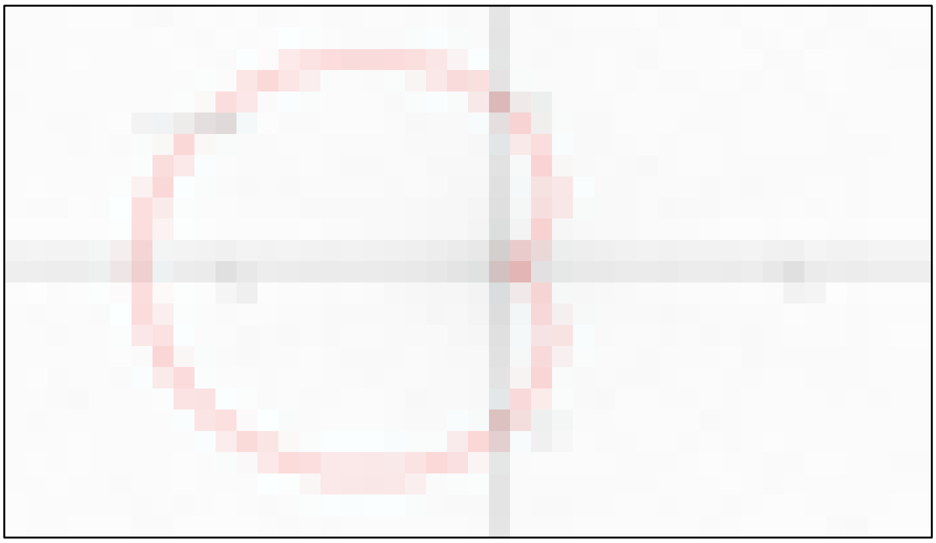
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	2	1.866	1.707	1.5	1	-0.5	0.3	0.13	0



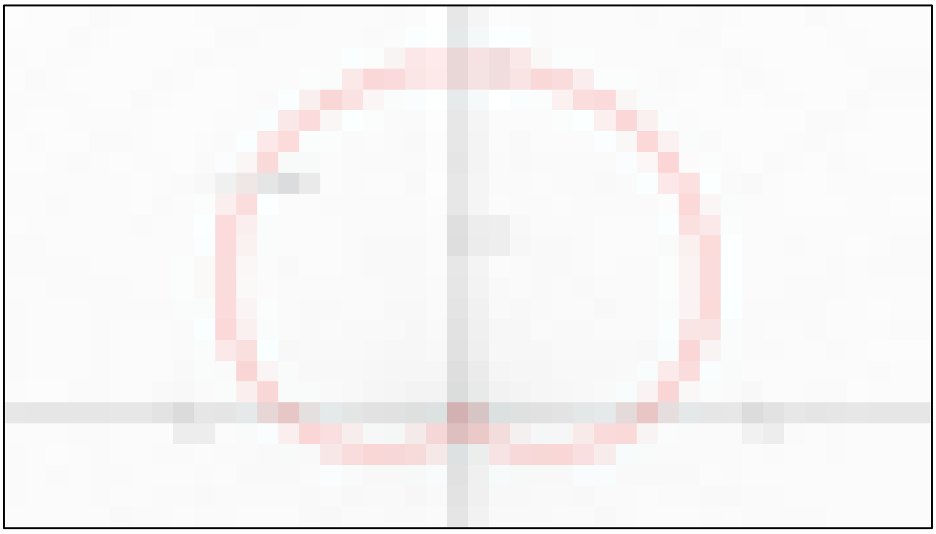
والمنحني الناتج هو ما يعرف بالمنحني القلبي(السكلوئيد)

قواعد 3:

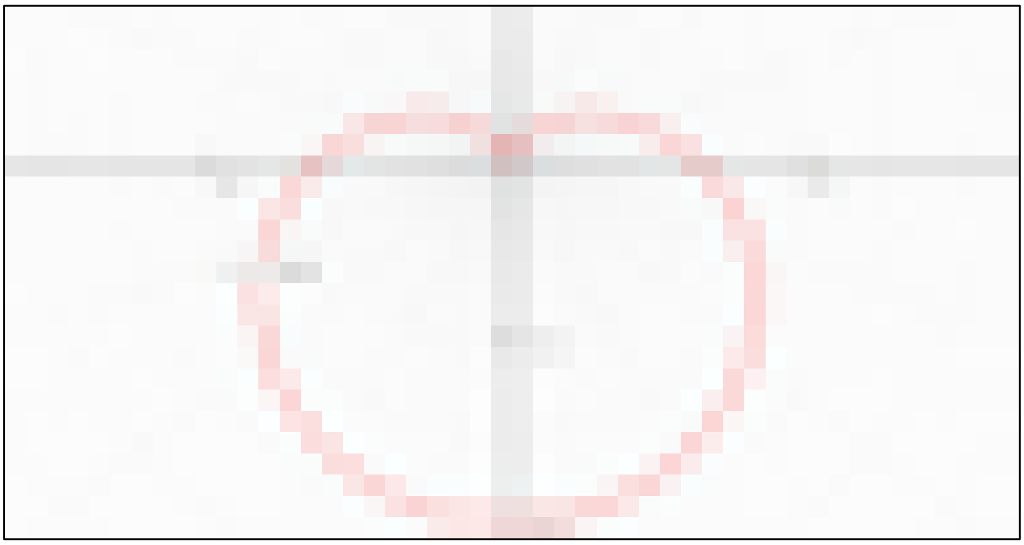
1- منحنى المعادلة القطبية $r = 1 - \cos\theta$ هو منحنى قلبي "Cardioid" متناظر حول المحور القطبي، ولكن يكون بالاتجاه المعاكس وذيله لليسار ،وطول محوره الأكبر $= 2$ ،وطول محوره الأصغر $= 1$.



2- منحنى المعادلة القطبية $r = 1 + \sin\theta$ هو أيضا منحنى قلبي قمته للأسفل، وذيله للأعلى متناظر حول المحور $\theta = 90^\circ$ ، وطول محوره الأكبر $= 2$، وطول محوره الأصغر $= 1$.



3- منحنى المعادلة القطبية $r=1-\sin\theta$ هو منحنى قلبي أيضا قمته للأعلى ، وذيله للأسفل متناظر حول المحور $\theta=90^{\circ}$ وطول محوره الأكبر $=2$، وطول محوره الأصغر $=1$.



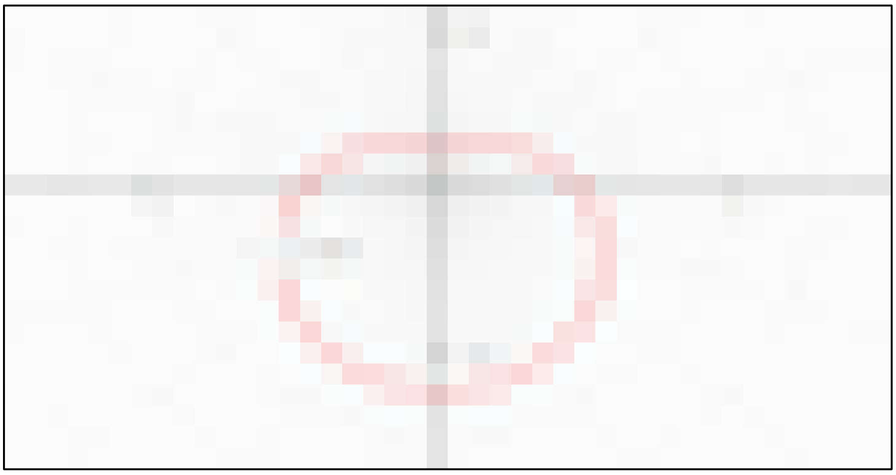
1. منحنى المعادلة القطبية $:b=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ $r=a\pm b$ هو منحنى قلبي طول احد محوريه $a\mp1$ وطول محوره الأخر a .

مثال:

ارسم المعادلة القطبية $r=\frac{3}{2}-\sin\theta$.

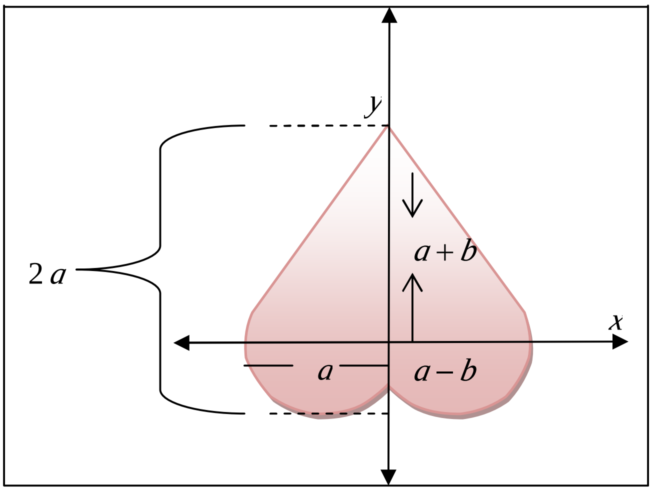
الحل : نكوّن الجدول التالي أولاً ثم نقوم بالرسم كما هو موضح أسفلة:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	270°	300°	315°	330°	360°
r	1.5	1	0.7	0.6	0.5	2.5	2.3	2.2	2	1.5



ملاحظة:

بصورة عامة يكون منحنى المعادلة القطبية $r = a \pm b\begin{Bmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{Bmatrix}$، عندما يكون $a < b$ حلزونيا "Limacine" يكون قطره $2a$، بحيث تكون المسافة من نقطة الأصل إلى الرأس $a+b$ ،ومن نقطة الأصل إلى القمة $a-b$، أما محوره الأصغر فهو a .

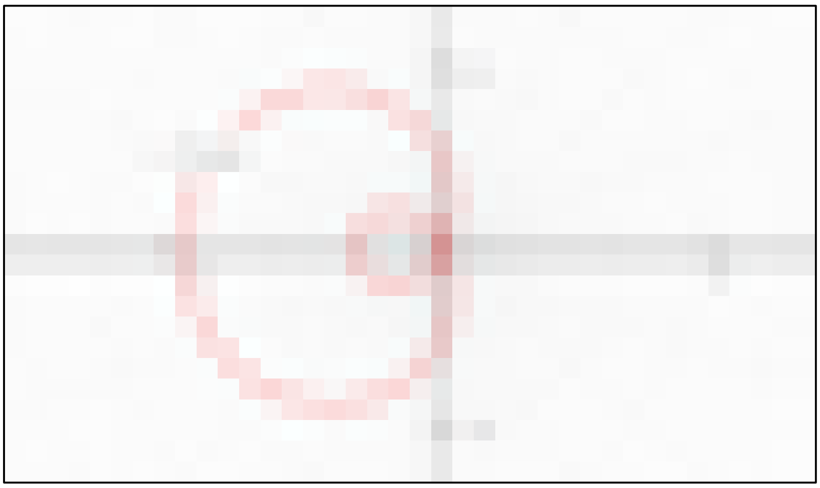


بصورة عامة يكون رسم المعادلة القطبية $r = a \pm b\begin{Bmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{Bmatrix}$ و $a < b$ يكون حلزوني مع لفة "Limacine with loop"، طول محوره الأكبر $a+b$ وطول محوره الأصغر $b-a$، وطول قطر الدورة a.

مثال :

ارسم منحني الدالة $r=\frac{1}{2}-\cos\theta$.

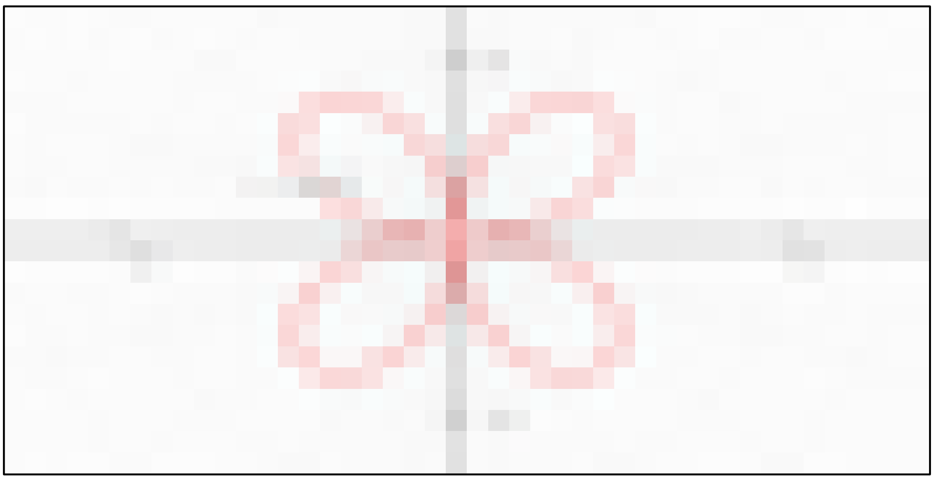
الحل:



مثال: ارسم المعادلة القطبية التالية : $r=\sin 2\theta$.

الحل :

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
r	0	0.8	1	0.8	0	-0.8	-1	-0.8	0	0.8	1	0.8	0

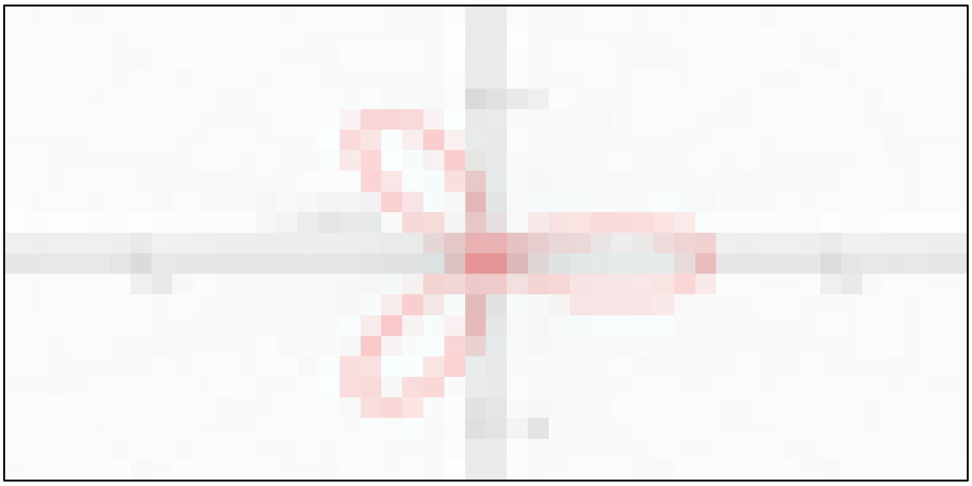


مثال :

ارسم المعادلة القطبية التالية : $r=\cos 3\theta$.

الحل: نكون الجدول التالي ثم نرسم لنحصل على الدائرة الموضحة أسفلة:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	1	0.866	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707	-0.866	-1



ملاحظة: لرسم أي معادلة قطبية من النوع $r=a\cos(n\theta)$ أو $r=a\sin(n\theta)$ فإن الرسم عبارة عن زهرة ذات $2n$ ورقة إذا كانت n عدد زوجي ويكون زهرة ذات n ورقة إذا كانت n عدد صحيح فردى .

مثال

ارسم المعادلة $r=k\sec\theta$

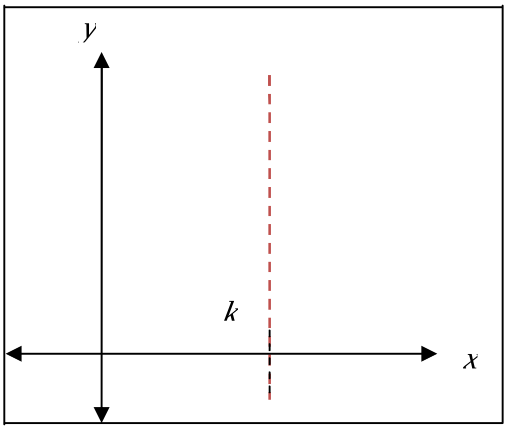
الحل :

$$\because \quad r=k\frac{1}{\cos\theta} \quad \rightarrow r\cos\theta=k$$

$$\therefore \quad x=k$$

وهو خط مستقيم يوازي محور الصادادات

وعلى بعد k منه.



نتيجة1:

منحنى المعادلة $r = k\sec\theta$ هو خط مستقيم عمودي، يقطع جزءاً من محور x بمقدار k.

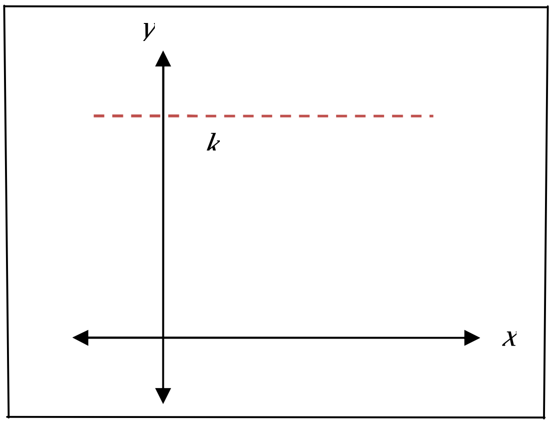
مثال : ارسم المعادلة $r = kc\sec\theta$

الحل :

$$\because \quad r = k\frac{1}{\sin\theta} \quad \rightarrow r\sin\theta = k$$

$$\therefore \quad y = k$$

(أنظر الشكل المرافق)



نتيجة2:

منحنى المعادلة $r = kc\sec\theta$ هو خط مستقيم أفقي يقطع جزءاً من محور y بمقدار k .

✍ أمثلة محلولة

1- أوجد نطاق ومدى العلاقات التالية:

$$R_1 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\} \quad , \; R_2 = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

الحل:

- نطاق العلاقة R_1 هي $D(R_1) = \{a,b,c\}$

مدى العلاقة R_1 هي $R(R_1) = \{1,2,3\}$

- نطاق العلاقة R_2 هي $D(R_2) = \{1,3,5\}$

مدى العلاقة R_2 هي $R(R_2) = \{2,4,6\}$

2- إذا كانت R علاقة نطاقها $\{1,2,3,4\}$ معرفه كالآتي:

$$R = \{(x,y) : y = 4x\}$$

أوجد مدى العلاقة R ، ونطاق ومدى العلاقة العكسية R^{-1} .

الحل:

نوجد مدى العلاقة $R = \{(1,4),(2,8),(3,12),(4,16)\}$

$D(R^{-1}) = \{4,8,12,16\}$ $\qquad D(R) = \{1,2,3,4\}$

$R(R^{-1}) = \{1,2,3,4\}$ $\qquad R(R) = \{4,8,12,16\}$

3- أوجد نطاق الدالة $f(x) = \sqrt{3x-5}$.

الحل:

$$D_f = \{ x \in R : f(x) \in R \} \to D_f = \{ x \in R : 3x - 5 \geq 0 \}$$

$$\left\{ x \in IR : x \geq \frac{5}{3} \right\} = \left[\frac{3}{5}, \infty \right)$$

4- أوجد النطاق الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

الحل:

$$D_f=\{\,x\in R\ :\ x^2-9\geq 0\,\}$$
$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$
$$x^2-9\geq 0\ \rightarrow\ x^2\geq 9$$
$$\sqrt{x^2}\geq\sqrt{9}\ \rightarrow\ |\,x\,|\geq 3\quad \therefore\ x\geq 3\ \ or\ \ x\geq -3$$
$$D_f=\{\,x\in R\ :\ \ x\geq 3\ \ or\ \ x\geq -3\,\}=(-\infty\,,-3]\cup[3\,,\infty)$$

5- أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt[3]{3x-5}$.

الحل:

$$D_f=\{\,x\in R\ :\ f(x)\in R\,\}=R$$
$$D_f=IR$$

لأن الجذر التكعيبي معرف دوماً.

6- أوجد نطاق الدالة $g(x)=\dfrac{x+1}{x^3-9x}$.

الحل:

$$D_g=IR-\{\,x\in IR\ :\ x^3-9=0\,\}=\{\,x\in IR\ :\ x^3-9x\neq 0\,\}$$
$$x^3-9x=0\ \ \rightarrow\ \ x(x^2-9)=0$$
$$x(x-3)(x+3)=0$$
$$x=0\quad or\quad x=\pm 3$$
$$\therefore\quad D_g=IR-\{\,0\,,\pm 3\,\}=(-\infty\,,-3)\cup(-3\,,0)\cup(0,3)\cup(3,\infty)$$

7- أوجد نطاق الدالة $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

الحل:

$$D_h=\left\{x\in IR\ :\ \frac{2-x}{2+x}\in IR\right\}=\{\,x\in IR\ :\ x\neq -2\,\}$$
$$=R-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$$

8- أوجد نطاق الدالة $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-2x}}$.

الحل:

$$D_k = \{\, x \in IR \;:\; 1-2x>0 \,\} = \left(-\infty \,,\, \frac{1}{2}\right)$$

9- بينّ أن الدالة $f(x)=2x+3$ دالة أحادية(متباينة).

الحل:

إذا كانت $f(a)=f(b)$ فإن $2a+3=2b+3$

منها $a=b$ إذا الدالة أحادية(متباينة) حسب التعريف.

10- بينّ أن الدالة $f(x)=x^2$ ليست دالة أحادية (متباينة).

الحل:

بما أنه هناك قيمتان للمتغير x هما $x_1=-2, x_2=-2$ لهما صورة واحدة

$f(2)=f(-2)=4$ وهذا تناقض إذا دالة $f(x)=x^2$ ليست متباينة أحادية.

11- إذا كان $f(x)=(x-2)(x-8)$ أوجد الدالة $f(x)$ على شكل كثيرة حدود ثم أوجد $f(3)$ ، $f(-1)$.

الحل:

$$f(x)=x^2-10x+16$$

بتعويض عن $x=3$ في المعادلة نحصل على $f(3)=9-30+16=-5$ وكذلك

$$f(-1)=1+10+16=27$$

12- إذا كانت $y-3=\sqrt{9-x^2}$ ، أوجد الدالة $f(x)$ ، ثم أوجد $f(2)$.

الحل:

$f(x)=\sqrt{9-x^2}+3$ بتعويض عن $x=2$ في المعادلة نحصل على $f(x)=\sqrt{5}+3$.

13- بينّ ما إذا كانت الدوال الآتية زوجية أم فردية؟

(1) $f(x)=x^4+4x^2-6$

(2) $f(x)=\sqrt{4x^2}$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$

(4) $f(x)=x^7+2x^3+16x$

(5) $f(x)=x^4-2x^3-4$

الأجوبة:

الدالة (1) دالة زوجية.

الدالة (2) دالة زوجية.

الدالة (3) دالة فردية.

الدالة (4) دالة فردية

الدالة (5) دالة ليست فردية ولا زوجية.

14- إذا كان لدينا الدالتان $f(x)=x^5-2x^3-5$ $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ فأنجز العمليات التالية عليهما : $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $f\times g$, $f\pm g$ ، $(f\circ g)(x)$.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة $f(x)$ هو $D_f=IR$ وبما أن $x^2+4>0$ فإن $D_f=IR$

نوجد عملية الجمع $f(x)+g(x)=x^5-2x^3-5+\sqrt{x^2+4}$

نوجد عملية الطرح $f(x)-g(x)=x^5-2x^3-5-\sqrt{x^2+4}$

عملية الضرب

$$f(x)\times g(x)=(x^5-2x^3-5)\times(\sqrt{x^2+4})$$
$$=x^5\sqrt{x^2+4}-2x^3\sqrt{x^2+4}-5\sqrt{x^2+4}$$

أما عملية التركيب تكون بالشكل التالي

$$f\circ g(x)=f(\sqrt{x^2+4})$$
$$=(\sqrt{x^2+4})^5-2(\sqrt{x^2+4})^3-5$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5 - 2x^3 - 5}{\sqrt{x^2+4}}$$

بشرط $x \in D_f \cap D_g = IR$

15- إذا كان لدينا الدالتان $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{x-1}$ فأنجز العمليات التالية عليهما: $f \pm g$ ، $f \times g$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، $(g \circ f)(x)$.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة $f(x)$ هو $D_f = IR$ وكذلك فإن $D_g = IR - \{1\}$، ومنها $D_f \cap D_g = IR - \{1\}$

نوجد عملية الجمع

$$f + g(x) = x^2 + (\frac{1}{x-1})$$

$$= \frac{x^3 - x^2 + 1}{x-1}$$

بنفس الطريقة نوجد عملية الطرح.

عملية الضرب $f \times g \ (x) = (x^2) \times (\frac{1}{x-1}) = \frac{x^2}{(x-1)}$

أما خارج القسمة يكون بالشكل التالي: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2 \div (\frac{1}{x-1})$

$$= (x^3 - x^2)$$

نوجد $(g \circ f)(x) = g(x^2) = \frac{1}{x^2 - 1}$ ، $x \neq \mp 1$

بشرط $R - \{1\} \cap R = R - \{1\} \neq \varphi \quad : \quad D_f \cup D_g \neq \varphi$

16- إذا كان لدينا الدالتان $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$ فأنجز العمليات التالية عليهما: $f \times g \ , \ f \pm g \quad (f \circ g)(x)$.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة $f(x)$ هو $D_f = [0, \infty)$، و $D_g = IR - \{-2\}$ منها $D_f \cap D_g = IR - \{-2\}$

نوجد عملية الجمع

$$f(x)+g(x)=(1+\sqrt{x})+\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)$$

$$=\frac{x+x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+4}+2}{x+2}$$

نوجد عملية الطرح

$$f(x)+g(x)=(1+\sqrt{x})-\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)$$

$$=\frac{x+x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+4}+2}{x+2}$$

عملية الضرب

$$f(x)\times g(x)=(1+\sqrt{x})\times\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)$$

$$=\frac{(1+\sqrt{x})\times(\sqrt{x^2+4})}{x+2}$$

أما عملية التركيب فتكون بالشكل التالي

$$f\circ g(x)=f\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)=1+\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}}$$

$$=(\sqrt{x^2+4})^5-2(\sqrt{x^2+4})^3-5$$

بشرط $x\in D_f\cap D_g$

17- إذا كان لدينا الدالتان $f(x)=x^2$ $g(x)=1+x$ فأنجز العمليات التالية عليهما:

$f\pm g$ ، $f\times g$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)$، $(g\circ f)(x)$، $(f\circ g)(x)$ ، $(g\circ f)(x)$.

الحل:

نوجد عملية الجمع $f(x)+g(x)=x^2+x+1$

نوجد عملية الطرح $f(x)-g(x)=x^2-x-1$

عملية الضرب $f(x)\times g(x)=x^3+x^2$

أما عملية التركيب فتكون بالشكل التالي

$$f(x)\circ g(x)=f(1+x)$$

$$=(1+x)^2$$

$$=x^2+2x+1$$

بشرط $x\in D_f\cap D_g=IR$

18- أوجد $g(x)$ ، $f(x)$ إذا كان $(f\circ g)(x)=(1+x^2)^3$.

الحل:

بفرض الدالة $g(x)=1+x^2$ بذلك تكون $f(x)=x^3$

(ملاحظة أن الحل ليس وحيداً)

19- أوجد $g(x)$ ، $f(x)$ إذا كان $(f\circ g)(x)=\sqrt{(2x+3)}$.

الحل:

بفرض الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ بذلك تكون $g(x)=(2x+3)$

(ملاحظة أن الحل ليس وحيداً)

20- أوجد $g(x)$ ، $f(x)$ إذا كان $(f\circ g)(x)=\sqrt[5]{(x^3-3x+8)}$.

الحل:

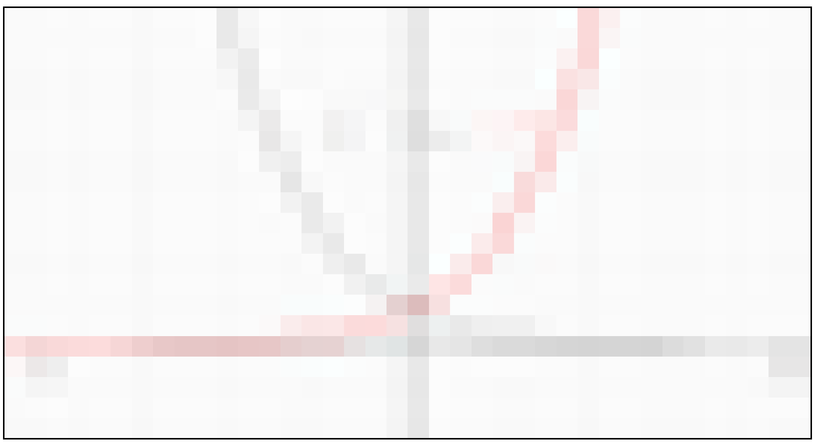
بفرض الدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}$ بذلك تكون $g(x)=(x^3-3x+8)$

(ملاحظة أن الحل ليس وحيداً)

21-أرسم الدوال التالية على الشكل ذاته:

$$f(x)=8^x \quad \text{و} \quad f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x$$

الحل :



22- حل المعادلة $2\cos(6x)+4\cos(6x)\sin(3x)=0$.

الحل:

نلاحظ أن: $\cos 6x$ عامل مشترك وبالتالي يكون لدينا :

$$\cos 6x(2+4\sin 3x)=0$$

وبالتالي أما $\cos 6x=0$ أو $(2+4\sin 3x)=0$

الاحتمال الأول يعطي : $\cos 6x=0$ بالتالي فإن :

$$6x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$$

أو

$$6x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \qquad \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}$$

الاحتمال الثاني يعطي :

$$(2+4\sin 3x)=0 \qquad \Rightarrow \sin 3x=\frac{-1}{2}$$

$$3x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k \qquad \Rightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$$

أو

$$3x=\pi+\frac{\pi}{3}+2\pi k \qquad \Rightarrow 3x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow \qquad x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$$

حيث $k=0,1,2,......$

23- حل المعادلة $\frac{1}{2}\sin(2x)-\cos^2 x=0$.

الحل:

نعلم أن $\sin 2x=2\sin x\cos x$ وبالتالي نعوض بالمعادلة فنجد :

$$\sin x\cos x-\cos^2 x=0$$

وتكون على الشكل التالي:

$$\cos x(\sin x-\cos x)=0$$

إما

$\cos x=0$ ومنها $x=\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi$

أو

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\Leftarrow\quad\sin x=\cos x\quad\Leftarrow\sin x-\cos x=0$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$k=0,1,2,\ldots\ldots \text{ حيث } \frac{\pi}{4}+\pi k\quad\Leftarrow\quad x=\frac{\pi}{2}-x+2\pi k$$

24− برهن صحة المتطابقة : $\sec^2 x\cos^2 x=\sec^2 x+\csc^2 x$.

الحل:

$$\begin{aligned}\sec^2 x+\csc^2 x&=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\\&=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\csc^2 x\sec^2 x\end{aligned}$$

25− برهن صحة المتطابقة : $\sec^4 x-\sec^2 x=\tan^4 x+\tan^2 x$.

الحل:

$$\begin{aligned}\tan^4 x+\tan^2 x&=\tan^2 x(\tan^2 x+1)\\&=\tan^2 x\sec^2 x\\&=(\sec^2-1)\sec^2 x\\&=\sec^4 x-\sec^2 x\end{aligned}$$

26− برهن صحة المتطابقة : $2\csc x=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}&=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{\sin x(1+\cos x)}\\&=\frac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\end{aligned}$$

$$= \frac{2+2\cos x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$

27- برهن صحة المتطابقة :

$$\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

الحل:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

28- برهن صحة المتطابقة :

$$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}.$$

الحل:

$$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}}$$

بضرب البسط والمقام بـــ $\sin x$ فنجد :

$$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

29- برهن صحة المتطابقة : $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$.

الحل:

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sin x - \sin x\cos x}{\cos x \sin^3 x}$$

$$= \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \sin^3 x}$$
$$= \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}$$
$$= \frac{1}{\cos x(1-\cos x)} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$$

30- برهن صحة المتطابقة :

$$\frac{\cos x \cot x - \sin x \tan x}{\csc x - \sec x} = 1 + \sin x \cos x \text{ .}$$

الحل:

$$\frac{\cos x \cot x - \sin x \tan x}{\csc x - \sec x} =$$
$$= \frac{\cos x \cot x - \sin x \tan x}{\csc x - \sec x} = \frac{\cos x \dfrac{\cos x}{\sin x} - \sin x \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x}}$$
$$= \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x}$$
$$= \cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + \sin x \cos x$$

31- أوجد القيمة العددية لكل من التعابير التالية :

1- $\tanh(0), \cosh(0), \sinh(0)$

2- $\tanh(1), \cosh(3), \sinh(2)$

3- $\cosh(\ln 3), \sinh(\ln 2)$

الحل :

1- قيمة الدوال الزائدية عندما $x = 0$:

$$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$
$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\tanh(0) = \frac{0}{1} = 0$$

2- قيمة الدوال الزائدية عند القيم المعطاة:

$$\sinh(2) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

$$\cosh(3) = \frac{e^3 + e^{-3}}{2}$$

$$\tanh(1) = \frac{\sinh(1)}{\cosh(1)} = \frac{\frac{e - e^{-1}}{2}}{\frac{e + e^{-1}}{2}} = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}$$

3- قيمة الدوال الزائدية عند القيم المعطاة:

$$\sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\cosh(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{10}{6}$$

$$\tanh(\ln 2) = \frac{\sinh(\ln 2)}{\cosh(\ln 2)} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

32- برهن صحة العلاقات التالية :

1- $\cosh x + \sinh x = e^x$

2- $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

3- $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

4- $\cosh 2x = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

5- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csc} h^2 x$

6- $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

الحل :

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

$$\sinh 2x = \sinh x \cosh x + \cosh x \sinh x = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^{-x} + e^x}{2} + \frac{e^{-x} - e^x}{2} e^{-x}$$

$$\cosh 2x = \cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - 1$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x} = \operatorname{csc} h^2 x$$

$$\tanh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

33- أكتب كلاً من المعادلات التالية على شكل لوغاريتم :

$5^{-2} = \frac{1}{25}$ و $81^{\frac{1}{4}} = 3$ و $7^2 = 49$.

الحل :

- نأخذ Ln الطرفين $\ln 5^{-2} = \ln \frac{1}{25}$ منها نحصل على $\ln 1 - \ln 25 = -2\ln 5$ نعلم بأن $\ln 1 = 0$ منها $-2\ln 5 = -\ln 25$.
- نأخذ Ln الطرفين $\frac{1}{4}\ln 81 = \ln 3$.
- نأخذ Ln الطرفين $7^2 = 49$ منها نحصل على $2\ln 7 = \ln 49$.

34- أكتب كلاً من المعادلات التالية على شكل أسي :

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ و $\log_2 16 = 4$.

الحل :

من خواص اللوغاريتمات نحصل على $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ فإن المقدار يصبح

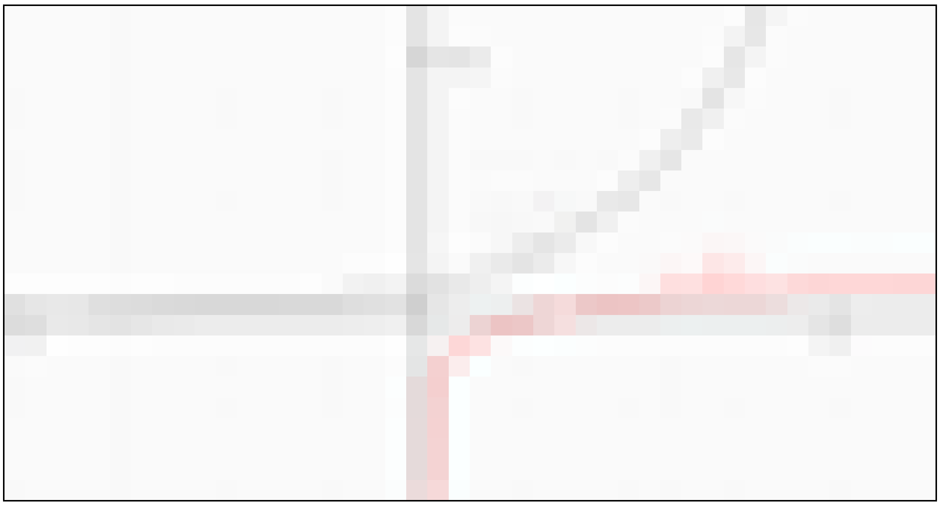
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2 \Rightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

من خواص اللوغاريتمات نحصل على $\log_2 16 = 4$ فإن المقدار يصبح $16 = 4^2$.

35– أرسم الدوال التالية على الشكل ذاته:

$y=\ln 3x$ و $y=e^{3x}$.

الحل :



36– أكتب التعابير اللوغارتمية التالية على شكل تعبير وحيد:

$3(\log 2+\log x)-\log y$ و $\frac{1}{2}[\ln x-\ln(x+2)]-\ln 2$.

الحل :

من خواص اللوغاريتمات نحصل على $3(\log 2+\log x)-\log y=3\log\frac{2}{x}-\log y$ منها

نحصل على: $3\log\frac{2}{x}-\log y=\log\left(\frac{2}{x}\right)^2-\log y=\log\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{y}$

من خواص الدالة Ln نحصل على $\frac{1}{2}[\ln x-\ln(x+2)]-\ln 2=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}-\ln 2$ منها

نحصل على $\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}-\ln 2=\ln\frac{\sqrt{\frac{x}{x+2}}}{2}$.

37- حل المعادلات اللوغارثمية التالية:

$\log_3(5x+1)=4$ و $\ln(x+1)-\ln(x-2)=\ln 4$.

الحل :

- من خواص اللوغاريتمات نحصل على$\log_3(5x+1)=4 \Rightarrow 5x+1=3^4=81$ منها نحصل على $x=\frac{80}{5}$ $5x=80 \Rightarrow$ هذا يؤدي إلى أن $x=16$

- من خواص الدالة Ln نحصل على $\ln(x+1)-\ln(x-2)=\ln 4 \Rightarrow \ln\frac{x+1}{x-2}=\ln 4$

منها نحصل على $\frac{x+1}{x-2}=4 \Rightarrow x-1=4(x-2) \Rightarrow x-1=4x-8$ منها تكون $x=\frac{7}{3}$.

38- حل المعادلة التالية:

$x-xe^{2x-1}=0$.

الحل :

نساوي المعادلة بالصفر فنحصل على:

$x\left(1-e^{2x-1}\right)=0$ في هذه الحالة يكون لدينا احتمالين :

1. الاحتمال الأول: $x=0$
2. الاحتمال الثاني: $1-e^{2x-1}=0 \quad \Leftarrow \quad e^{2x-1}=1=e^0 \quad \Leftarrow \quad 2x-1=0$

منها $x=\frac{1}{2}$.

39- أوجد مع الرسم الدالة العكسية إذا كانت $f(x)=\frac{(x+1)}{(x-1)}$.

الحل :

واضح إن $f: IR \to IR-\{1\}$

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $y=\frac{x+1}{x-1}$ ونطاقها $D_f=IR-\{1\}$ و $x_1,x_2 \in D_f \quad \forall$بحيث

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}$ منها نحصل على $(x_1+1)(x_2-1)=(x_2+1)(x_1-1)$

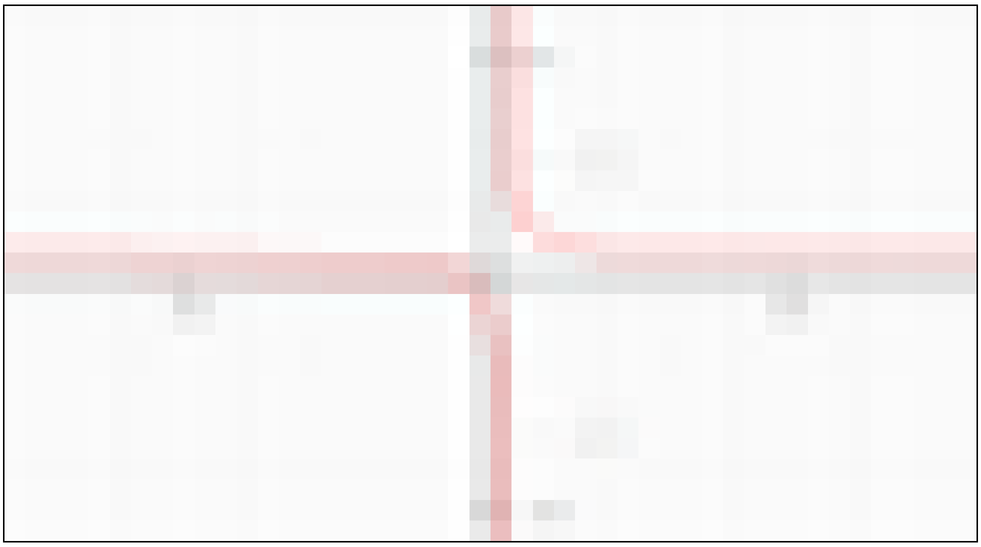
وبفك المقدار السابق نحصل على $x_1x_2-x_1x_2-1=x_1x_2-x_1x_2-1$ منها

$-x_1+x_2=x_2+x_1\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f=IR$ إذا $f(x)$ تقابلية .

بالتعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=\frac{x+1}{x-1}$ منها نحصل على $y(x-1)=x+1$

هذا يؤدي إلى $yx-y=x+1$ منها نوجد x من العلاقة السابقة $x=\frac{y+1}{y-1}$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$



40- أوجد (مع الرسم) الدالة العكسية إذا كانت $f:IR\to IR$ و $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

الحل:

يمكن بسهولة برهان إن الدالة $f(x)$ تقابلية و نطاقها $D_f=IR$ و $x_1,x_2\in D_f$ $\forall$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1+1)^{\frac{1}{3}}=(x_2+1)^{\frac{1}{3}}$ منها نحصل على

$(x_1+1)=(x_2+1)\Rightarrow x_1=x_2$

إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها

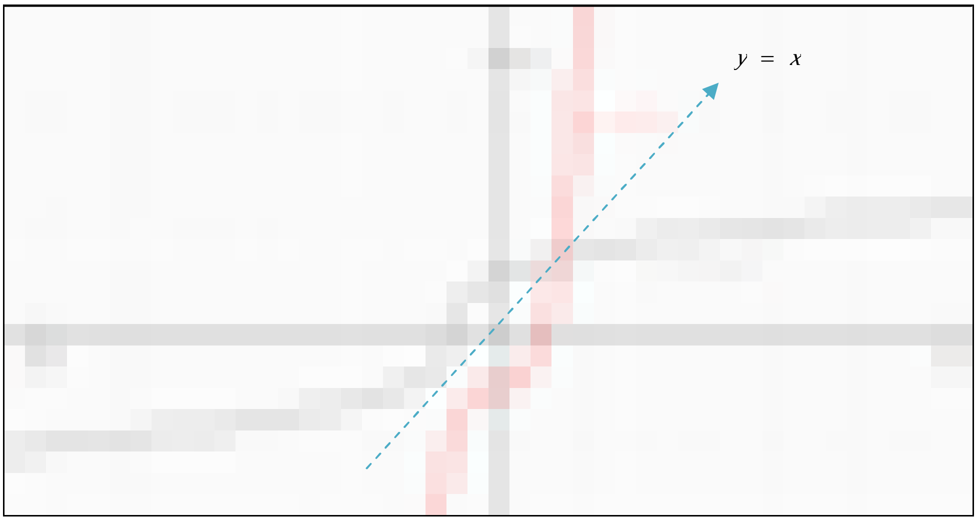
$R_f = IR$ إذا $f(x)$ تقابلية .

التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$

التغيير يعطينا $y^3 = x+1$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $x = y^3 - 1$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x) = x^3 - 1$



41- أوجد (مع الرسم) الدالة العكسية إذا كانت $f(x)=\ln(x+2)-3$ حيث $f:(2,\infty)\to IR$.

الحل:

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $f(x)=\ln(x+2)-3$ ونطاقها

$D_f = \{x\in IR: x+2>0\}$ ومداها $R_f = IR$ و $\forall \quad x_1, x_2 \in D_f$ نجد أن

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \ln(x_1+2)-3=\ln(x_2+2)-3$ منها نحصل على

$\ln(x_1+2)=\ln(x_2+2)$ وبفك المقدار السابق نحصل على

$(x_1+2)=(x_2+2)\Rightarrow x_1 = x_2$

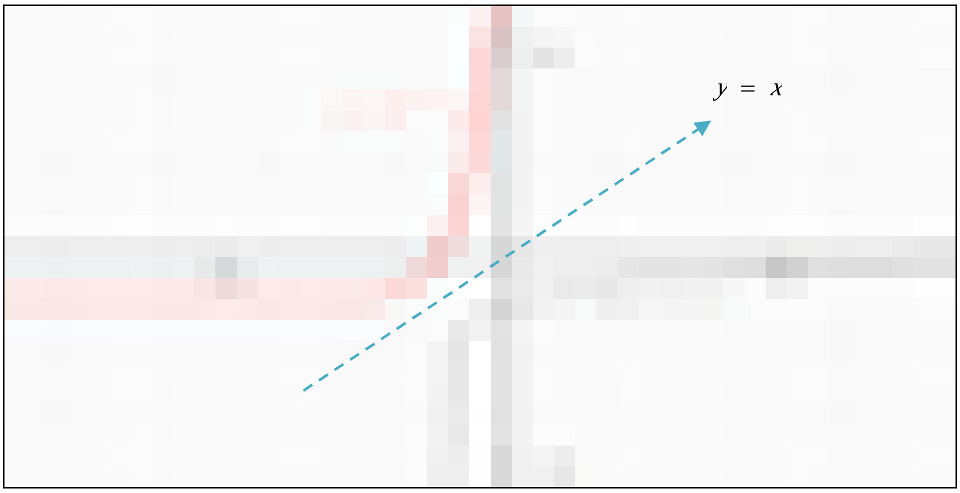
إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f = IR$ إذا $f(x)$ تقابلية .

التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=\ln(x+2)-3$ التغيير يعطينا

$e^{y}=(x+2)-e^{3}$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $f^{-1}(y)=x=e^{y}+e^{3}-2$

∴ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=e^{x+3}-2$



42- أوجد (مع الرسم) الدالة العكسية إذا كانت $f: IR \rightarrow (3,\infty)$

و $f(x)=e^{(x-1)}+3$.

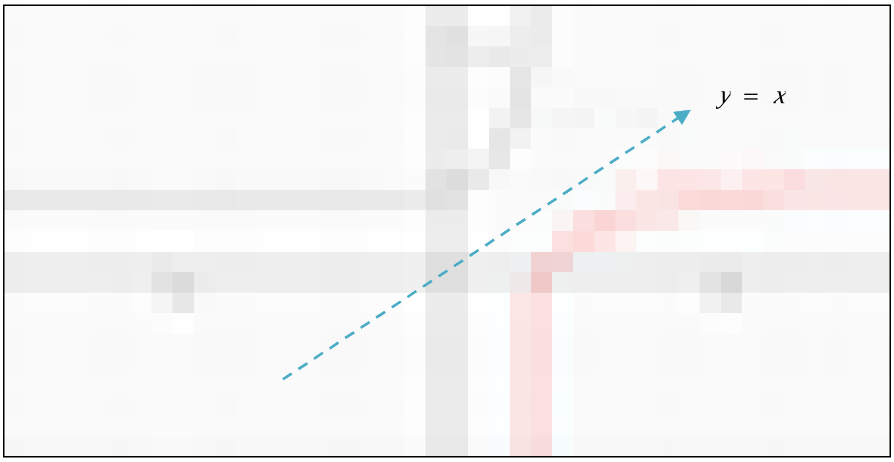
الحل:

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $f(x)=e^{(x-1)}+3$ ونطاقها $D_f=IR$ ونحدد مدى الدالة بما إن $10<e^{(x-1)}<\infty$ منها $3<e^{(x-1)}+3<\infty$ إذا $R_f=[3,\infty)$ و $\forall \quad x_1,x_2\in D_f$ نجد أن

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{(x_1-1)}+3=e^{(x_2-1)}+3$ منها نحصل على $e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f=IR$ إذا $f(x)$ تقابلية التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=e^{(x-1)}+3$ التغيير يعطينا $\ln y=x-1+\ln 3$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $x=\ln y-\ln 3+1$ منها $x=\ln(y-3)+1$

∴ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=\ln(x-3)+1$



43- أوجد الدالة العكسية إذا كانت، $f:[0,\infty)\rightarrow(-\infty,2]$ $f(x)=-x^2+2$.

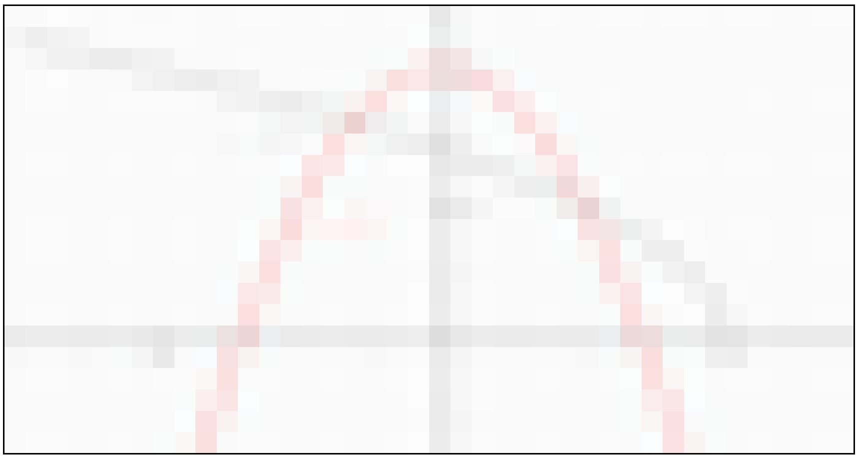
الحل:

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $f(x)=-x^2+2$ ونطاقها $D_f=IR$

$\forall\ x_1,x_2\in D_f$ نجد أن $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -x_1^2+2=-x_2^2+2$ منها نحصل على $-x_1^2=-x_2^2$ وبما أن x_1,x_2 غير سالبان فإن : $x_1=x_2$ إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f=IR$ إذا $f(x)$ وبالتالي فهي تقابلية التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=-x^2+2$

التغيير يعطينا $x^2=2-y$ وبما أن $x\in[0,\infty)$ فإن $x=\sqrt{2-y}$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=\sqrt{2-x}$



44- أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ ومداها ثم أوجد دالتها العكسية واذكر نطاقها وارسم بيان الدالتين على نفس الشكل.

الحل:

واضح أن الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ نطاقها هو: $D_f=\{x:x\in R, 4-x\geq 0\}=\{x:x\leq 4\}$

وبذلك يكون نطاقها $D_f=(-\infty,4]$.

أما مدى هذه الدالة فنعلم أن الجذر موجب دوماً وبالتالي: $R_f=[0,\infty)$.

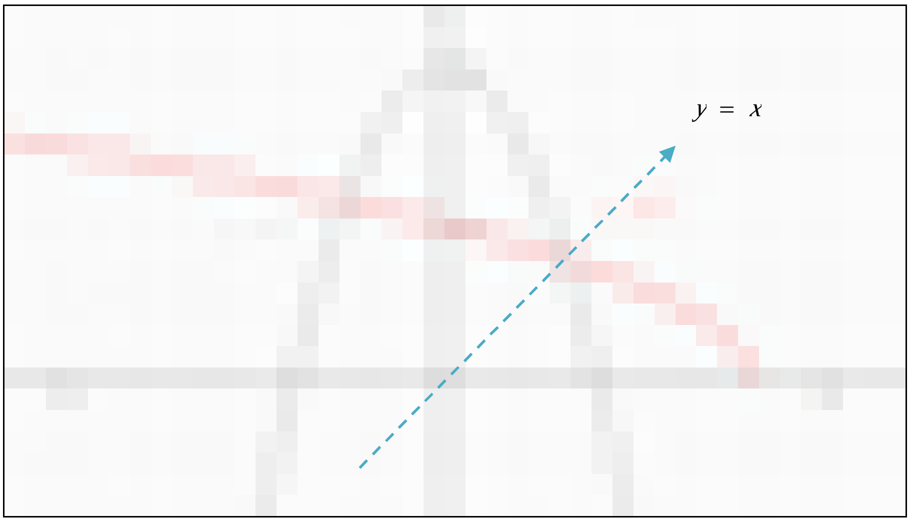
نوجد $f^{-1}(x)$ بما أن $f(x)=\sqrt{4-x}$ منها يكون لدينا :

$$f(x)=\sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad y^2=4-x$$

نوجد الدالة بدلالة المتغير y على الشكل التالي:

$$x=4-y^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=4-x^2$$

بذلك يكون لدينا: $R_f = f^{-1}(x)=[0,\infty)$



45- حل المعادلة $x=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

الحل: لحل المعادلة السابقة نوجد قيمة x على الشكل التالي:

$$x=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos x=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x=0.7227+2\pi k \quad , \quad k=0,\pm1,\pm2,..$$

46- حل المعادلة $10\cos 3x = 7$ على الفترة $[-2,5]$.

الحل:

نوجد قيمة x على الشكل التالي:

$$\cos 3x = \frac{7}{10} \quad \Rightarrow \quad 3x = \cos^{-1}\left(\frac{7}{10}\right) = 2.34 + 2\pi k$$

بذلك تكون قيمة $x = \frac{2.34}{3} + \frac{2\pi k}{3} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

نلاحظ انه : من أجل قيم k المختلفة نحصل على الجدول التالي:

هذه القيمة مرفوضة	$x = -2.87$	هذه القيمة مرفوضة	$x = -3.4$	$k = -2$
هذه القيمة مقبولة	$x = -0.7821$	هذه القيمة مقبولة	$x = -1.3123$	$k = -1$
هذه القيمة مقبولة	$x = 1.31$	هذه القيمة مقبولة	$x = 0.7821$	$k = 0$
هذه القيمة مقبولة	$x = 3.4067$	هذه القيمة مقبولة	$x = 2.876$	$k = 1$
هذه القيمة مقبولة	$x = 5.5$	هذه القيمة مقبولة	$x = 4.97$	$k = 2$

47- حل المعادلة $6\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ على الفترة $[-20, 20]$.

الحل:

نوجد قيمة x على الشكل التالي:

$$6\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) = 0.1674$$

يوجد قيمتين لـــ x $\frac{x}{2} = \pi - 0.1674 + 2\pi k \quad , \quad \frac{x}{2} = 0.1674 + 2k\pi$ بذلك تكون قيمة x على الشكل التالي: $x = 5.9484 + 4k\pi \quad , \quad x = 0.3348 + 4k\pi$

نلاحظ انه: من أجل قيم $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ المختلفة نحصل على الجدول التالي:

هذه القيمة مقبولة	$x = -19.18$	هذه القيمة مرفوضة	$x = -24.79$	$k = -2$
هذه القيمة مقبولة	$x = -6.6$	هذه القيمة مقبولة	$x = -12.23$	$k = -1$
هذه القيمة مقبولة	$x = 5.9484$	هذه القيمة مقبولة	$x = 0.3348$	$k = 0$
هذه القيمة مقبولة	$x = 18.5$	هذه القيمة مقبولة	$x = 12.9012$	$k = 1$
هذه القيمة مرفوضة	$x = 31.08$	هذه القيمة مقبولة	$x = 25.46$	$k = 2$

48− حل المعادلة $3\sin(5x)=-2$ على المجال $[0,1]$.

الحل:

نوجد قيمة x على الشكل التالي: $\sin(5x)=\frac{-2}{3} \quad \Rightarrow \quad 5x=\sin^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)=-0.73$

يوجد قيمتين لـــ x إما $5x=-0,73+2\pi k=2\pi-0.73=5.55+2\pi k$

أو $5x=\pi+0.73+\pi k=3.87+2\pi k$

حيث $k=0,\pm1,\pm2,...$

وبالتالي يكون: إما $x=1.11+\frac{2\pi k}{5}$ أو $x=0.774+\frac{2\pi k}{5}$ لنجد القيم المناسبة للمجال المعطى:

هذه القيمة مرفوضة	$x=-0.482$	هذه القيمة مرفوضة	$x=-0.146$	$k=-1$
هذه القيمة مقبولة	$x=0.774$	هذه القيمة مرفوضة	$x=1.11$	$k=0$

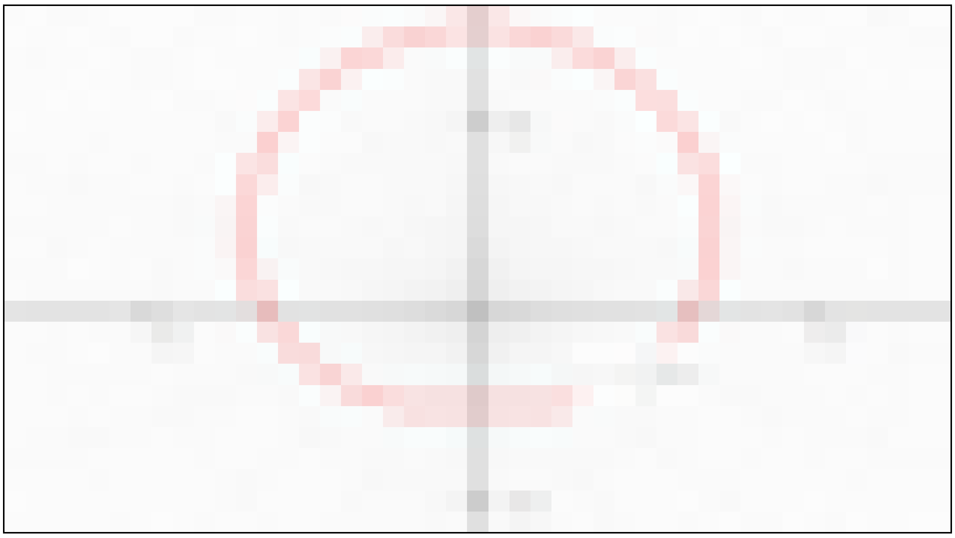
وبقية القيم لـــ k كلها تعطى قيم مرفوضة والحل الوحيد هو $x=0.774$.

نلاحظ أن: حل هذه المعادلات يحتاج آلة حاسبة علمية أو جداول الدوال العكسية.

49− ارسم المعادلة القطبية $r=1+\frac{1}{2}\sin\theta$.

الحل :

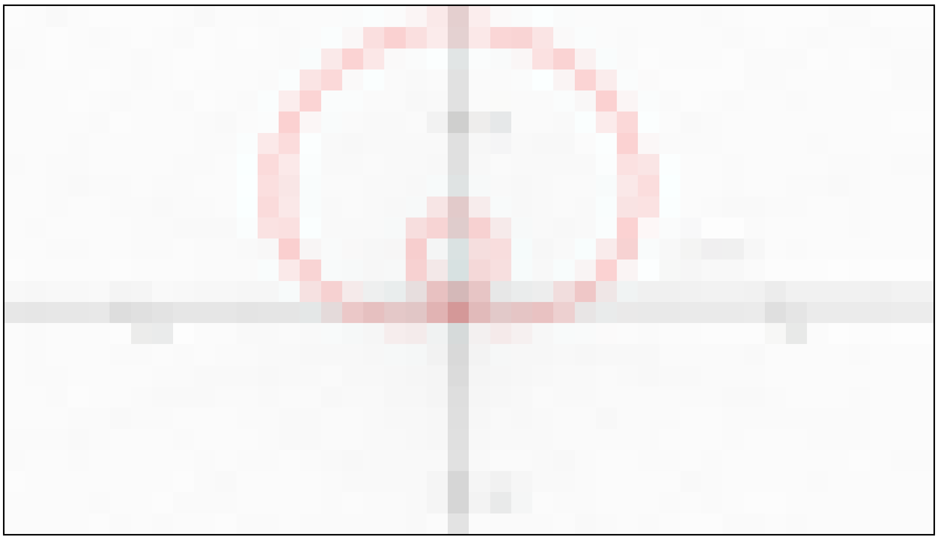
نوجد قيمة كلا من: $b=\frac{1}{2}$, $a=1$ منها $b<a$ $\therefore$ هو منحنى حلزوني.



51–ارسم المعادلة القطبية $r=\frac{1}{2}+\sin\theta$.

الحل :

θ	0°	30°	45°	60°	90°	270°	300°	315°	330°	360°
r	0.5	1	1.2	1.36	1.5	-0.5	-0.3	-0.2	0	0.5



52– ارسم المعادلة القطبية $r=\ln\theta$.

الحل :



Summary

Let and X be Y town an empty sets then:

The Cartesian product of X and Y ,denoted by $X \times Y$, is the set of ordered

1- Pairs (x, y) where $x \in X$ and $y \in Y$ That is:
$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \quad and \quad y \in Y\}$

2- A relation R from X to Y is any subset of $X \times Y$ that is $R \subseteq X \times Y$.

3- A domain of relation R from X to Y, denoted $Dom(R)$, is the set of all $x \in X$ such that $(x, y) \in R$, That is: $Dom(R) = \{x \in X: \ (x, y) \in R\}$

4- Range of relation R from X to Y, denoted $range(R)$, is the set of all $y \in Y$ such that $(x, y) \in R$, That is : $Range(R) = \{y \in Y: \ (x, y) \in R\}$

5- If R is a relation from X to Y ,the inverse relation of R is a relation from X and is denoted by R^{-1} , that is : $R^{-1} = \{(y, x): \ (x, y) \in R\}$

6- A function f is a relation from X to Y that assigns to each element $x \in X$ one and only one element $f(x) \in Y$.

7- A function f is a relation from X to Y that satisfies the following:
I- $D_f = X$
II- If $(x,y) \in f \ \ and \ (x,z) \in f \ \ Then \ y = z$.

Algebraic operations on functions:

If $f(x)$ and $g(x)$ are two functions, then :

$1 - (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$2 - (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

$3 - \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x) \neq 0 \qquad \forall \quad x \in D_f \cap D_g$

- The Composition of function :

If $f(x)$ and $g(x)$ are two functions , then :

The Composite function $f \circ g$ is defined by: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, where $D_f \cap D_g \neq \varphi$.

The Composite function $f \circ g$ is defined by: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, where

$D_f \cap D_g \neq \varphi$.

- The function $f(x)$ is called even function if :

$f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

- The function $f(x)$ is called odd function if :

$f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

- The function $f : X \to Y$ is called:

One – to- one function if for $x_1, x_2 \in D_f$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ or } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

On –to- function if :

$\forall \ y \in Y, \exists \ x \in X$ such that $y = f(x)$ or if $R_f = Y$

One – to- one correspondence if f is One – to- one and f is onto.

If The function $f : X \to Y, y = f(x)$, is One – to- one correspondence ,then f has an inverse function , denote f^{-1}, such that $f^{-1} = Y \to X$ and $x = f^{-1}(x)$.

-Bounded and unbounded functions :

If there is a number M such that: $f(x) \leq M$, $\forall x \in D_f$

We say that f is bounded from above on D_f and call M an upper bound of the function .

If The function m such that : $f(x) \geq m$, $\forall x \in D_f$

We say that f is bounded from below on D_f and call m a lower bound of The function .

If there exist two numbers M and m such that: $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in D_f$

We say that f is bounded on D_f .

Some types of function:

The function:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0 ,$$

$a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \dots\dots\dots, a_1, a_0 \in R, n \geq 0$ is called polynomial function , $a_0, a_1, \dots\dots\dots, a_{n-1}, a_n$ coefficients and n degree of polynomial function .

Square root function :

$f(x) = \sqrt{g(x)}$ where $g(x)$ is polynomial function of n degree.

Rational function :

We called the function : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Rational function

Where $p(x)$ and $q(x)$ are degree n and m .

Absolute value function :

$$f(x) = |f(x)| \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & if & f(x) \geq 0 \\ f(x) & if & f(x) < 0 \end{array} \right\}.$$

Greatest integer function (step function): $f(x) = [x]$

Where $[x]$ denote the greatest integer number less than or equal to the number x $(n \leq x \leq n+1)$ then $[x] = n$.

Trigonometric functions:

I- $f(x) = \sin(x)$ is odd function and bounded.

II- $f(x) = \cos(x)$ is even function and bounded

III- $f(x) = \tan(x)$ is odd function and unbounded

IV- $f(x) = \cot(x)$ is odd function and unbounded

V- $f(x) = \sec(x)$ is even function and unbounded

VI - $f(x) = \csc c(x)$ is odd function and unbounded

7- Hyperbolic Functions:

1. $f(x) = \sinh(x)$, where $D_f = R$ And $R_f = R$ is odd function , because

$$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x)$$

And $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

2. $f(x) = \cosh(x)$, where $D_f = R$ and $R_f = R$ is even function , because

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -f(x)$$

And $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

3. $f(x) = \tanh(x)$, where $D_f = R$ And $R_f = R$ is odd function , because

$$f(-x) = \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -f(x)$$

and $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tan y}{1 + \tanh x \tan y}$

4. $f(x) = \coth(x)$, where $D_f = R$ And $R_f = R$ is odd function , because

$$f(-x) = \coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -f(x)$$

and $\coth(x+y) = \dfrac{\coth x + \coth y}{1 + \coth x \coth y}$

5. $f(x) = \sec h(x)$, where $D_f = R - \{x : \cosh = 0\}$ and $R_f = R$ is even function , because $f(-x) = \sec h(-x) = \dfrac{1}{\cosh(-x)} = \dfrac{1}{\cosh(x)} f(x)$

6. $f(x) = cech(x)$, where $D_f = R - \{x : \sinh = 0\}$ and $R_f = R$ is odd function, because $f(-x) = c\sec h(-x) = \dfrac{1}{\sinh(-x)} = \dfrac{1}{-\sinh(x)} = -f(x)$

8- Exponential function:

For any real number $a > 0$ and $a \neq 1$ we called $f(x) = a^x$ an exponential function.

9-Logarithm function:

For all positive numbers a, where $a \neq 1$ we called $y = f(x) = \log_a x$ logarithm function and its mean $x = a^y$.

- If $a = 10$ then the logarithm called common logarithm.
- If $a = e$ then the logarithm called natural logarithm.

10- Inverse Hyperbolic Functions:

$1 - \sinh^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \sinh(y)$,

$2 - \cosh^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \cosh(y)$, $y \geq 0$

$3 - \tanh^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \tanh(y)$, $4 - \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in R$

$5 - \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}$, $x \geq 1$, $6 - \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $-1 < x < 1$

****

تمارين على الفصل الثاني

1: أوجد نطاق ومدى الدوال الثابتة موضحاً الإجابة على خط الأعداد:☜

$a)\ f(x)=|x-4|$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad c)\ f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2+8x+7}$

$d)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{9-6x}}{-x+2}$ $\quad e)\ f(x)=\dfrac{5x+4}{|5x+4|}$ $\quad f)\ f(x)=\sqrt[4]{9-x^2}$

$g)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{9-4x}}{\sqrt{2x-1}}$ $\quad h)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{8x-4}{x-3}}$ $\quad i)\ f(x)=(9x-2)^{\frac{3}{2}}$

2: إذا كانت $f(x)=5x^2-7x+3$ أوجد $f(0)$ ، $f(a)$ ، $f(\frac{-2}{5})$ مع رسم الدالة.

3: أوجد المجموع ، الفرق،الضرب، والقسمة للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل من التمارين التالية:☜

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ ، $g(x)=\sqrt[4]{(x^5+3x-1}$.

(b) $f(x)=(x-1)^{\frac{3}{5}}$ ، $g(x)=\dfrac{3x+9}{7x^3}$.

(c) $f(x)=(9x-2)^{\frac{3}{2}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{8x-4}{x-3}}$

(d) $f(x)=4-x$ ، $g(x)=\sqrt[5]{(x-1)}$

ثم عين كلا من $(f\circ g)(x)$ ، $(g\circ f)(x)$ في التمارين السابقة مع تحديد النطاق المشرك للدوال.

4: أوجد أحدى الدوال $g(x)$ إذا كان:☜

(a) $(f\circ g)(x)=(1+x)^2$ وكان $f(x)=x^2$

(b) $(f\circ g)(x)=x^2$ وكان $f(x)=\sqrt{x-1}$

(c) $(f\circ g)(x)=x+2$ وكان $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

(d) $(f\circ g)(x)=|x|$ وكان $f(x)=\sqrt{x}$

5: عين أحدى الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في التمارين التالية مع تحديد النطاق المشرك للدوال: ☞

$$(a)(f\circ g)(x)=\frac{\sqrt{3x-2}}{x^2+3x}$$

$$(b)\ (f\circ g)(x)=\sqrt[3]{\frac{(x^7+1)}{(x^5-3x+1)^2}}$$

$$(c)\ (f\circ g)(x)=\frac{(x+5)}{x^3+4x}$$

6: برهن صحة العلاقات التالية : ☞

$$(a)\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x \qquad (b)\ \frac{\sin 2x+\sin 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x$$

$$(c)\ \frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x+y)}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}$$

$$(d)\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=-\cot\frac{1}{2}(x-y)\cot\frac{1}{2}(x+y)$$

$$(e)\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=\sin 2\theta+(\sin\theta+\sin 3\theta)=\sin 2\theta(1+\cos\theta)$$

7:برهن صحة العلاقات العدية التالية : ☞

$$(a)\ \cos 220+\cos 100+\cos 20=0$$

$$(b)\cos 130+\cos 110+\cos 20=0$$

8:برهن صحة المتطابقات التالية : ☞

$$(a)\ \cos^2\theta\cos^3\theta=\frac{1}{16}(2\sin\theta+\sin 3\theta-\sin 5\theta)$$

$$(b)\ \cos^2\theta\cos^4\theta=\frac{1}{32}(2-\cos 2\theta-2\cos 4\theta+\cos 6\theta)$$

9: أكتب المعادلات التالية على شكل آسي وأحسب قيمة المجهول في المعادلة :☜

$(a)\quad -3=\log_{\frac{1}{4}} x \qquad (b)\quad 3=\log_a 8 \qquad (c)\quad 3=\log_4 x$

10:استخدم خواص اللوغاريتمات لفك المقادير التالية:☜

$(a)\ \log_5 17^3 \qquad (b)\ \log_3 \sqrt{x-5}$

$(c)\ \log\dfrac{6(a+1)}{b} \qquad (d)\ \log\dfrac{x^4}{9(2x+3)^5}$

11: أكتب التعابير اللوغارثمية التالية على شكل تعبير وحيد:☜

$(a)\quad 2(\log x-3\log(x+1)-\log y$

$(b)\quad 3\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)]-3\ln(x+4)$

12: احسب قيمة كلاً مما يلي:☜

$(a)\ \log_4 4^5$

$(b)\ 7\log_9 81$

$(c)\ 4\log_8 \sqrt{8}$

$(d)\ \log 10^5$

$(f) 10^{\log 4}$

13: حل دون استخدام الآلة الحاسبة :

$(a)\ 125=5^x$

$(b)\ 81^x=\dfrac{1}{9}$

$(c)\ 2^{3x-1}=32$

$(d)\ 27^x=3^{2x+5}$

14: حل المعادلات اللوغارثمية التالية:☜

$(a)\quad \log x+\log(4x-7)=\log 2$

$(b)\quad \log_3 x+\log_3(2x+1)=1$

15: اثبت أن الدوال التالية تقابلية ثم أوجد الدوال العكسية للدوال الآتية مع رسم هذه الدوال: ☞

$(a)\ f(x) = \sqrt{3x-2}$ $\quad f:\left[\frac{2}{3},\infty\right) \to [0,\infty)$

$(b)\ f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}}$ $\quad f: IR - \{1\} \to IR$

$(c)\ f(x) = \ln(x+5)$ $\quad f:(-5,\infty) \to IR$

$(d)\ f(x) = 4 - x^3$ $\quad f: IR \to IR$

$(f)\ f(x) = \sqrt{(x-5)(x^2-1)}$ $\quad f: IR \to [-1,1] \cup [5,\infty)$

$(g)\ f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 3$ $\quad f: IR \to (-\infty,3]$

16: ارسم كل من المعادلات القطبية التالية في الفترة $[0.\pi]$: ☞

$(a)\quad x = 5 - 3\cos\theta, \quad y = 2 + 2\sin\theta$

$(b)\quad x = 3 + 5\cos\theta, \quad y = -1 + 5\sin\theta$

$(c)\quad r = 2 + 3\sin\theta$ $\qquad (d)\quad r = \sin 4\theta$ $\qquad (e)\quad r = \cos 5\theta$

****

النهـايـــات Limits

هناك كثير من الدوال التي تكون معرفة في نطاق معين، ما عدا إحدى القيم، أو بعض القيمِ، من ذاك النطاق تكون فيها الدالة غير معرفة، **فمثلاً:** الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة عندما $x=1$

حيث $f(1)=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ فهي غير معرفة (ليس لها قيمة حقيقية على خط الأعداد الحقيقية)

وبالتالي نطاقها يكون $D\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

ولفحص هذه الدالة عند اقتراب x من 1 نجد أن الدالة تقترب من 2 كما هو مبين بالجدال التالي:

اقتراب من اليسار $x<1$	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$	اقتراب من اليمين $x>1$	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
0.95	1.95	1.05	2.05
0.96	1.96	1.04	2.04
0.97	1.97	1.03	2.03
0.98	1.98	1.02	2.02
0.99	1.99	1.01	2.01
⋮	⋮	⋮	⋮

من خلال الجدول السابق **نلاحظ:** أن الدالة تقترب شيئًا فشيئًا من 2 كلما اقتربت x من 1.

$\therefore$ لهذا نقول أن نهاية الدالة هو 2 عندما تؤول x إلى 1.

أي أنه بالرغم من عدم تعريف الدالة عند $x=1$ إلا أنه توجد لها نهاية عندما $x=1$

تعريف:

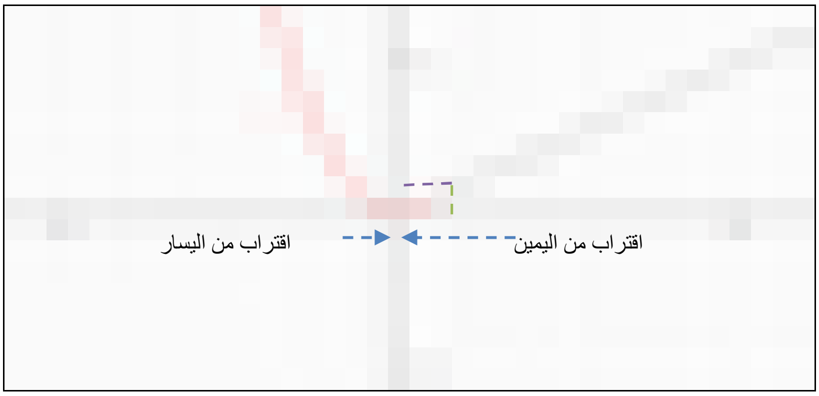
لتكن f دالة معرفة على فترة مفتوحة حول قيمة حقيقية a باستثناء القيمة a نفسها. فإذا كانت $f(x)$ تقترب اختياريًا من قيمة حقيقية L, كلما اقتربت x من a . فإننا نقول أن $f(x)$ تقترب من النهاية L كلما اقتربت x من a ونكتب ذلك على الصورة الآتية :

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ونقراها نهاية الدالة f عندما تؤول x إلى a هي L .

مثال:

وضح نهاية الدالة بالرسم: $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x\geq 1 \\ x^2 & , \quad x<1 \end{cases}$.

الحل:



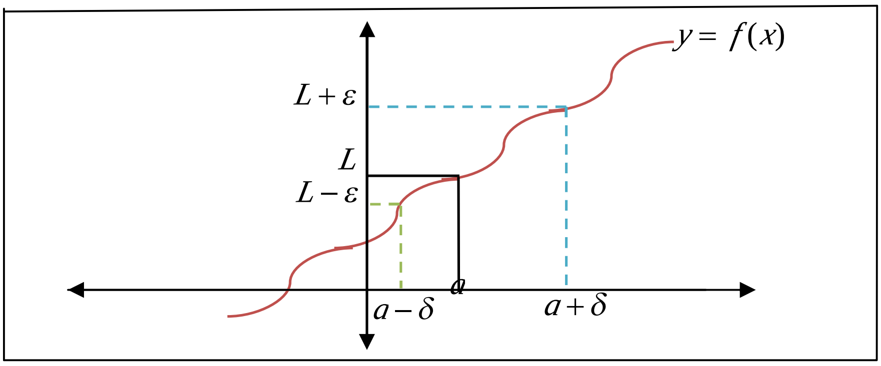
التعريف الرياضي للنهاية

لتكن f دالة معرفة على فترة مفتوحة تحتوي على عدد a، فيما عدا العدد a نفسه، وليكن L عددًا حقيقيًا عندئذ العبارة: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

تعني أنه لكل عدد حقيقي صغير $\varepsilon>0$ يوجد عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث يكون: $|f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-a|<\delta$ الرمز ε يقرأ "epsilon" وهو مقدار موجب صغير جدًا.

والرمز δ يقرأ "delta" وهو مقدار موجب صغير جدًا ملائم للعدد ε .

$$|x-a|<\delta \quad \leftarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$
$$-\delta<x-a<\delta \quad \leftarrow \quad -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$$
$$a-\delta<x<a+\delta \leftarrow \quad L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$$
$$x\in(a-\delta\,,\,a+\delta) \quad \leftarrow \quad f(x)\in(L-\varepsilon\,,\,L+\varepsilon)$$



مثال:

إذا كان لدينا الدالة $f(x)=2x+1$ ، فأوجد نهاية هذه الدالة عندما $x \to 1$.

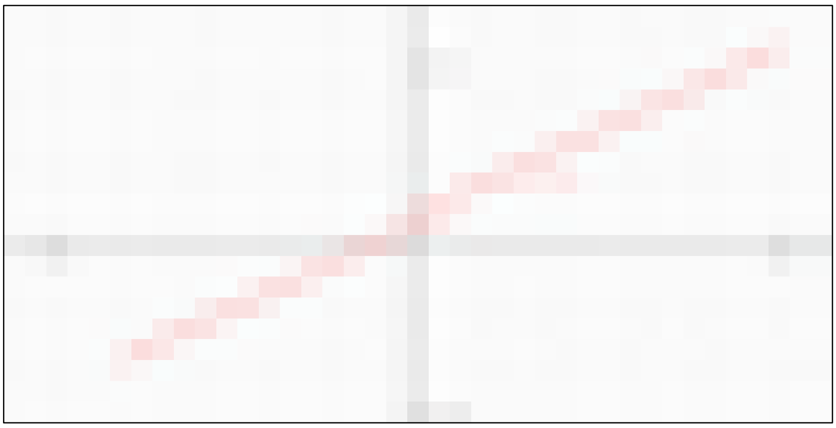
لاحظ الجدول التالي:

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1.0001	1.001	1.1	1.5
$f(x)$	2	2.8	2.98	2.998	3.00002	3.002	3.2	4

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=2(1)+1=3$$

بتطبيق التعريف الرياضي نجد:

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$
$$|2x+1-3|<\varepsilon$$
$$|2x-2|<\varepsilon$$
$$|2(x-1)|<\varepsilon$$
$$|2||x-1|<\varepsilon \quad \div 2$$
$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$



يمكن اعتبار $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ إذا كان $|x-1|<\delta$ فإن

$$|f(x)-3|<\varepsilon$$

إذا كان $\varepsilon=0.2$ فإن: $0.9<x<2.1 \leftarrow 2.8<f(x)<3.2$

إذا كان $\varepsilon=0.02$ فإن: $0.99<x<1.01 \leftarrow 2.98<f(x)<3.02$

إذا كان $\varepsilon=0.002$ فإن: $0.999<x<1.001 \leftarrow 2.998<f(x)<3.002$

إذا كان $\varepsilon=0.0002$ فإن: $0.9999<x<1.0001 \leftarrow 2.9998<f(x)<3.0002$

إذا كان $\varepsilon=0.00002$ فإن: $0.99999<x<1.00001 \leftarrow 2.99998<f(x)<3.00002$

النهايتان اليسرى واليمنى Left and Right limits

إن قيمة حدود المتوالية $1,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{9}{5},.......,\frac{2n-1}{n}$ هي باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول عن قيمة حد x تقترب من 2 من اليسار، وتكتب $x\to 2^-$. وبالمثل قيمة x في حدود المتوالية $2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ..., 2+\frac{1}{10^n}, ...$ هي باستمرار أكبر من 2 ونقول في مثل هذه الحالة أن x تقترب من 2 من اليمين، وتكتب. $x\to 2^+$ ومن الواضح أن وجود العبارة $\underset{x\to a}{Lim}\ f(a)$ تستلزم وجود تساوي كل من نهاية اليسار $\underset{x\to a^-}{Lim}\ f(a)$ ونهاية اليمين $\underset{x\to a^+}{Lim}\ f(a)$ على أن وجود نهاية اليمين، لا يستلزم وجود نهاية اليسار، والعكس صحيح.

مثال:

إن مجال التعريف (النطاق) للدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ هو الفترة $-3\le x\le 3$، فإذا كان a أي عدد في الفترة المفتوحة $-3<x<3$، فإن $\underset{x\to a}{Lim}\sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوي $\sqrt{9-a^2}$، لنعتبر الآن $a=3$ ولنجعل x تقترب إلى 3 من اليسار أولا، فنجد $\underset{x\to 3^-}{Lim}\sqrt{9-x^2}=0$ أما إذا جعلنا x بعد ذلك تقترب من 3 من اليمين فإننا نجد أن $\underset{x\to 3^+}{Lim}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة ؛ لأن $9-x^2$ يكون سالباً عندما $x>3$، وهكذا نجد أن $\underset{x\to 3}{Lim}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

بالمثل:

نجد أن $\underset{x\to -3^+}{Lim}\sqrt{9-x^2}$ موجودة ومساوية للصفر ولكن $\underset{x\to -3^-}{Lim}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة وبالتالي $\underset{x\to 3}{Lim}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

مبرهنة Theorem:

يكون للدالة $f(x)$ نهاية معرفة وموجودة $\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)=L$ إذا وفقط إذا كان:

$$\underset{x\to a^+}{Lim}\ f(x)=\underset{x\to a^-}{Lim}\ f(x)=L$$

مثال:

أدرس نهاية الدالة $f(x)$ عند $x=1$ حيث: $f(x)=\begin{cases} 2-x & , \quad x<1 \\ x^2+1 & , \quad x>1 \end{cases}$ مع رسم الدالة .

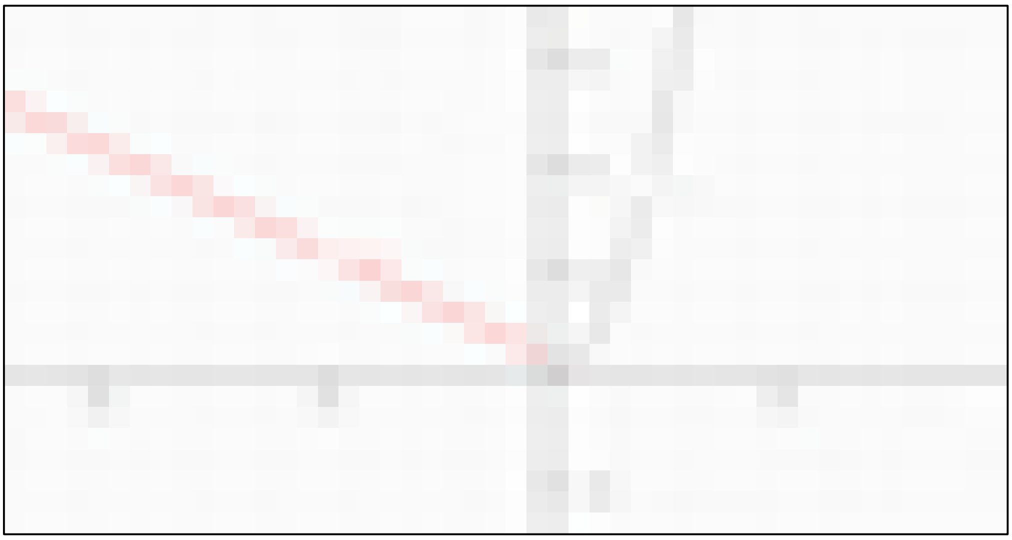
الحل:

نوجد النهاية نمن اليسار واليمين فنحصل على القيم التالي:

النهاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2 - x) = 1$

النهاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 1) = 2$

بما أن $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ إذا $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة



تعريف:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$$d\,F(x) = f(x)dx$$

أي أن بمعنى أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$ أو المشتقة $\frac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x)$.

مثال:

هل توجد للدالة نهاية عندما x تؤول إلى 2

$$f(x)=\begin{cases}3-x & , \quad x<2\\ \frac{x}{2}+1 & , \quad x>2\end{cases}$$ مع رسم الدالة .

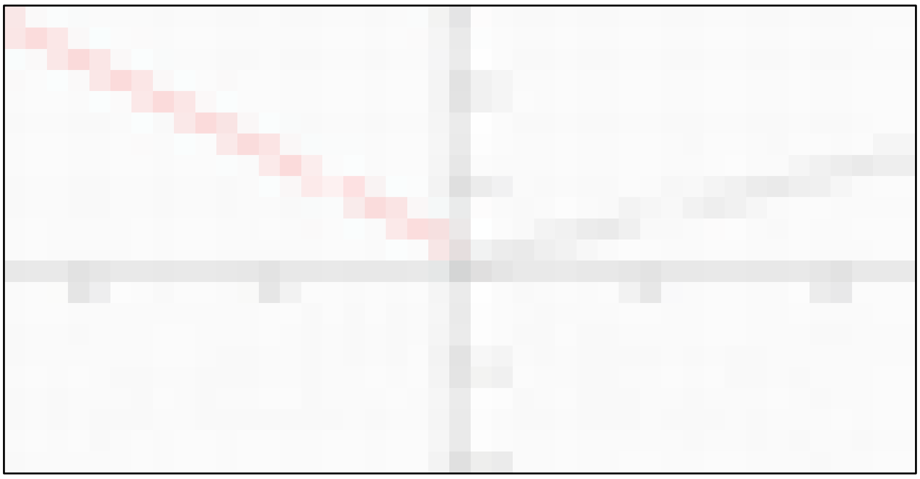
الحل:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3-x)=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$$

$$\because \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

ومنها نستنتج إن $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة



مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ عندما $x\to 0$ مع رسم الدالة .

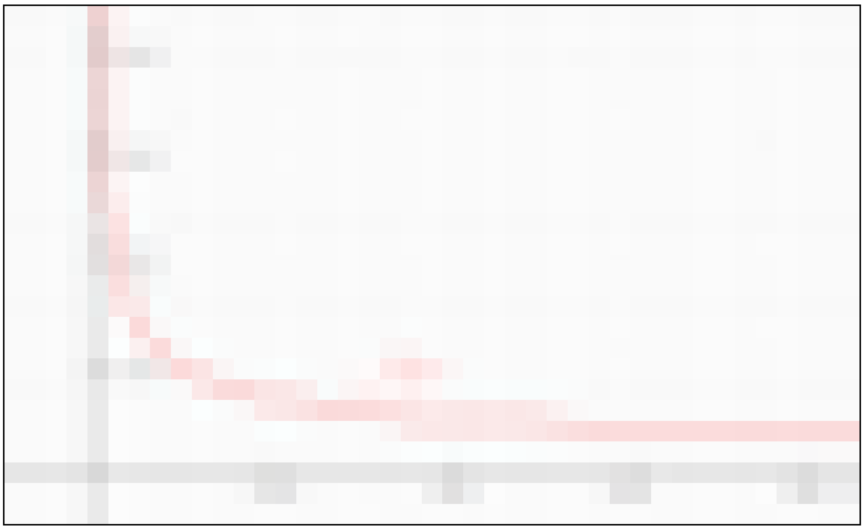
الحل:

بالضرب في مرافق البسط

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$



مثال:

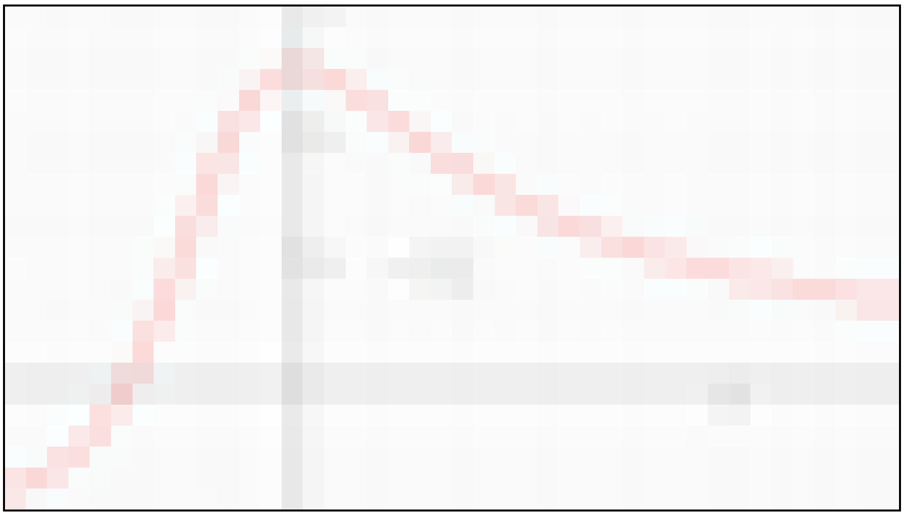
أوجد نهاية الدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$ عندما $x\to 2$ مع رسم الدالة.

الحل:

نعلم أن $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{n}{m}a^{n-m}$ وبالتالي يكون لدينا:

حيث أن $f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$ وباعتبار $a=2$ و $n=2$ و $m=3$ بذلك يكون لدينا :

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x^3-2^3}=\frac{2}{3}2^{2-3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$



حساب نهاية الدالة Algebraic Techniques For Farcing Limits

لحساب نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ نعوض في هذه الدالة عند $x = a$ وقد نحصل على المطلوب كما يبين المثال أدناه وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرق أخرى سنتطرق إليها أسفلة.

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x^2$ عندما $x \to 2$.

الحل:

بما أن $f(x) = x^2$ نبحث عن نهاية $f(x)$ عندما xتؤول إلى 2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 4 عندما تقترب x إلى العدد 2.

مبرهنات في النهايات: Theorems in Limits

1. نهاية المقدار الثابت .Limit of Constant

لدالة $f(x) = b$ نجد أن $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} b$.

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = 5$ عندما $x \to 3$.

الحل:

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ منها نجد أن النهاية تساوي قيمة ثابتة وهي 5.

2. نهاية دالة كثيرة الحدود:

لدالة $f(x) = x$ نجد أن $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x$.

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x$ عندما $x \to -3$.

الحل:

$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x = (-3)$ منها نجد أن النهاية تساوي قيمة ثابتة وهي -3.

3. نهاية مجموع دالتين .Limit of Sum functions

لتكن الدالة $F(x)=f(x)+g(x)$ حيث $g(x)$, $f(x)$ دالتان في x فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x)=(6x^3+5x^2)$ عندما $x\to -2$.

الحل:

$$\lim_{x\to -2}(6x^3+5x^2)=\lim_{x\to -2}6x^3+\lim_{x\to -2}5x^2=6(-2)^3+5(-2)^2=-48+20=-28$$

4. نهاية فرق دالتين .Limit of Difference functions

لتكن $F(x)=f(x)-g(x)$ حيث $g(x)$, $f(x)$ دالتان في x فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x)=(2x^4-x^3)$ عندما $x\to 1$.

الحل:

$$\lim_{x\to 1}(2x^4-x^3)=\lim_{x\to 1}2x^4-\lim_{x\to 1}x^3=2(1)^4-(1)^3=1$$

وعمومًا إذا كانت:

$$F(x)=f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\ldots\ldots\ldots\pm f_{n-1}(x)\pm f_n(x)\pm$$

حيث $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\ldots, f_{n-1}(x), f_n(x)$ دوال في x فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x)\pm\lim_{x\to a} f_3(x)\pm\ldots\ldots\pm\lim_{x\to a} f_{n-1}(x)\pm\lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال:

لتكن الدالة $F(x)=x^4-2x^3+3x^2+x$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 1$.

الحل:

$$\lim_{x\to 1}\text{F(x)}=\lim_{x\to 1}x^4-\lim_{x\to 1}2x^3+\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x$$
$$=(1)^4-2(1)^3+3(1)^2+1=3$$

5. نهاية جداء (ضرب) دالتين .Limit of products functions

لتكن $F(x)=f(x).g(x)$ حيث $g(x)$, $f(x)$ دوال في x ، فإن

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال:

لتكن الدالة $F(x)=(-2x^3-1)(5x^2+1)$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to -1$.

$$\lim_{x\to -1} F(x)=\lim_{x\to -1}(-2x^3-1)(5x^2+1)$$
$$=\lim_{x\to -1}(-2x^3-1)\times \lim_{x\to -1}(5x^2+1)$$
$$=\left(-2(-1)^3-1\right)\times\left(5(-1)^2+1\right)=6$$

وعمومًا إذا كان $F(x)$ عبارة عن جداء عدة دوال

$$f_1(x)\times f_2(x)\times f_3(x)\times ....\times f_n(x)$$

فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a} f_1(x)\times \lim_{x\to a} f_2(x)\times \lim_{x\to a} f_3(x)\times ....\times \lim_{x\to a} f_n(x)$$

6.نهاية قسمة دالتين .Limit of quotient functions

لتكن الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ حيث $g(x)$, $f(x)$ دالتان في x و $g(x)\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad ,\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

مثال:

لتكن الدالة $F(x)=\dfrac{2x+6}{5x^2-1}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0} F(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+6}{5x^2-1}\right)=\frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(5x^2-1)}=\frac{6}{-1}=-6$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\neq 2 \\ 0 & , \quad x=2 \end{cases}$ اوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل:

نلاحظ هنا أنه إذا كان $x\to 2$ هذا يعني أن $x\neq 2$ دائما هي قربها من اليسار واليمين إذن

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة $x = 3$ إذا كانت $f(x)$ معرفة بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & , \quad x\le 3 \\ \sqrt{x+13} & , \quad x>3 \end{cases}$$ مع رسم الدالة .

الحل:

عندما تقترب x إلى العدد 3 من اليسار فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=x^2-5$ ، وبالتالي:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-5) = (3)^2-5 = 4$$

عندما تقترب x إلى العدد 3 من اليمين؛ فإن عبارة الدالة $f(x)$

هي $f(x)=\sqrt{x+13}$ وبالتالي نجد أن:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = 4$$



مثال:

أوجد نهاية الدالة إذا كانت $g(t)$ معرفة بالعلاقة:

$$g(t)=\begin{cases} t^2 & , \quad t\ge 0 \\ t-2 & , \quad t<0 \end{cases}$$ عندما $t \to 0$.

الحل:

عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليسار فإن عبارة الدالة g (t) هي $g(t)=t-2$ ، وبالتالي:

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \lim_{t\to 0^-} (t-2) = 0-2 = -2$$

عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليمين فإن عبارة الدالة g (t) هي $g(t)=t^2$ ، وبالتالي:

$$\lim_{t\to 0^+} g(x) = \lim_{t\to 0^+} t^2 = 0^2 = 0$$

إذا النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار، وبالتالي فليس للدالة نهاية عند هذه النقطة.

7. نهاية الدالة المثلثية .Limit of trigonometric functions

نهاية الدالة المثلثية عندما $x\to c$ هو قيمة الدالة عند $x=c$

مثلا:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin(0) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & , \quad x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & , \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ مع رسم الدالة .

الحل:

نوجد نهاية الدالة عندما $x\to \frac{\pi}{2}^-$:

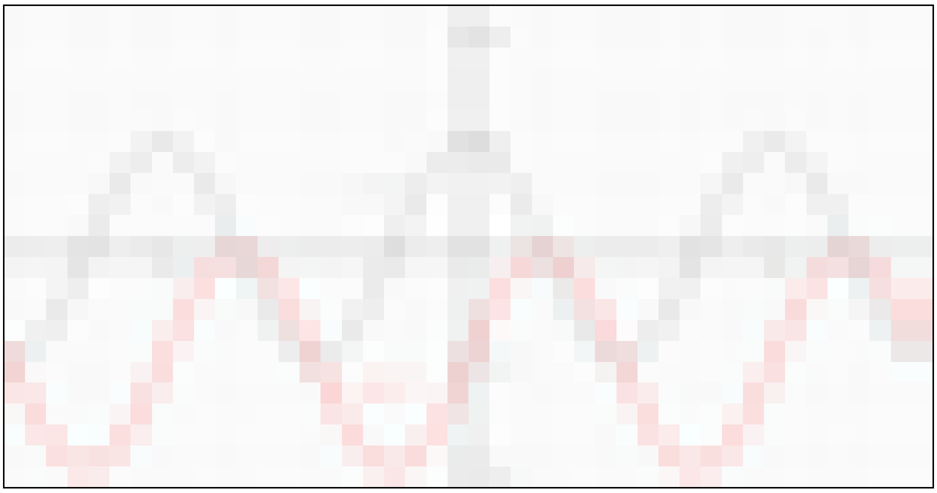
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x - 1) = 1-1 = 0$$

نوجد نهاية الدالة عندما $x\to \frac{\pi}{2}^+$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\cos x) = 0$$

إذا:

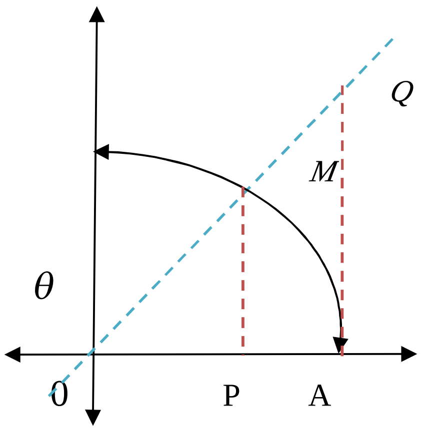
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$$



مبرهنة Theorem:

أثبت أن : $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\ \theta}{\theta} = 1$

البرهان:



لدينا من الشكل المقابل: $\tan\ \theta = \dfrac{QA}{oA} = QA$

$MP = \sin\theta \quad , \quad 0 < \theta < \pi$

واضح أن: $\sin\ \theta < \tan\ \theta$ لان $MP < AQ$.

كذلك فإن: مساحة المثلث $\Delta AQ0$ < من مساحة القطاع الدائري ΔOPA < مساحة المثلث ΔAQP.

$$\Delta \quad AOP = \frac{1}{2} OA \times PM = \frac{1}{2} \sin\theta$$

$$\Delta \quad AOP = \frac{1}{2} OA \times AM = \frac{1}{2} \tan\theta$$

مساحة القطاع الدائري AOP : $\frac{1}{2} r^2 \theta \frac{1}{2} \theta$

إذا:

$$\frac{1}{2} \sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

بفرض أن: $0<\theta$ فإن $\frac{\sin\theta}{\theta}<1<\frac{\tan\theta}{\theta}$

وبالتالي يكون لدينا:

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta} \quad \text{أو} \quad 1>\frac{\theta}{\sin\theta}>\cos\theta$$

وبما أن $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ يكون لدينا $1\geq \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\geq 1$

إذا: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ وهو المطلوب

مبرهنة Theorem:

أثبت أن : $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$

البرهان:

نستخدم طريقة الضرب في المرافق نحصل على:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=1\times 0=0\end{aligned}$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}&=\frac{5}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{5\theta}\\&=\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{4\theta}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{4\theta} = \frac{1}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$$
$$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3 - 3\cos x}{4x}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3 - 3\cos x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \left(2 + \frac{3(1 - \cos x)}{x} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \times (2 + 3x0) = \frac{1}{2}$$

مثال:

عين النهاية التالية: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال:

أوجد نهايات التالية:

$$1-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} \qquad 2-\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \tan x}{\sin^4 x}$$

$$3-\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}$$

الحل:

1- نهاية الدالة $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ بفرض أن: $x-\frac{\pi}{2}=t$ يكون

$$t\to 0 \quad \Leftarrow \quad x\to\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$$

2- نهاية الدالة $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \tan x}{\sin^4 x}$ يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\sin^4 x \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\theta} \frac{x^3}{\sin^3\theta} \times \frac{1}{\cos\theta} = 1\times 1 = 1$$

3- نهاية الدالة $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}$ بالتعويض المباشر يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x}{x^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x}{x^2+1} = \frac{0+2}{0+2} = 1$$

8. نهاية قوة الدالة Limit 0f a Power Function

نهاية دالة مرفوعة إلى أس:

$$\lim_{t\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{t\to a} f(x)\right]^n$$

مثال:

أحسب نهاية الدالة $f(x)=(3x+4)^5$ عندما $x \to 2$.

الحل:

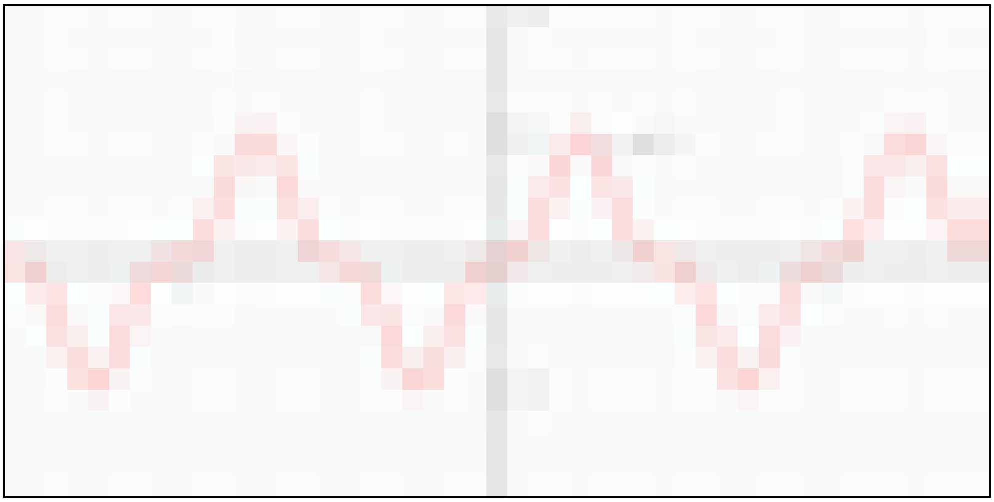
$$\lim_{x\to 2}(3x+4)^5=\left[\lim_{x\to 2}(3x+4)\right]^5=(10)^5$$

مثال:

أحسب نهاية الدالة $f(x)=\sin^3 x$ عندما $x \to \frac{\pi}{2}$ مع رسم الدالة .

الحل:

نوجد نهاية الدالة على الشكل التالي: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\right)^3=(1)^3=1$



ملاحظة:

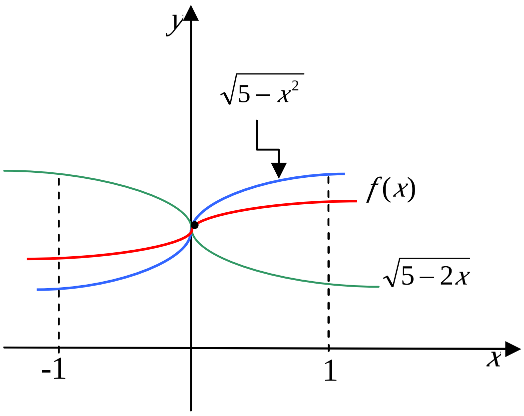
إذا كانت $f(x)\le h(x)\le g(x)$ لجميع قيم x التي تنتمي إلى فترة مفتوحة حول العدد a عدا $x=a$ وإذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=L$

فإن $\lim_{x\to a} h(x)=L$

مثال:

إذا كان $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ في الفترة $[-1,1]$ أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ مع رسم الدالة .

الحل:



$$\because \lim_{x\to 0} \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5}$$

$$\because \lim_{x\to 0} \sqrt{5-2x^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$$

ملاحظة:

في هذا المثال نجد أنه بالرغم من عدم معرفتنا للصيغة الجبرية للدالة $f(x)$ إلا أنه باستخدام الخاصية 7 نستطيع أن نقول أن نهايتها هي $\sqrt{5}$ عندما x تؤول إلى الصفر.

مثال:

أحسب نهاية الدالة $f(x) = \cos 7x . e^{2x}$ عندما $x \to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \cos 7x . e^{2x} = \left(\lim_{x\to 0} \cos 7x\right) \times \left(\lim_{x\to 0} e^{2x}\right) = \cos 0 \times e^{0} = 1 \times 1 = 1$$

مثال:

بفرض أن $\sin x \le f(x) \le x$ أوجد نهاية $f(x)$ عند $x = 0$.

الحل:

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

حالات عدم التعيين: Indeterminate Cases

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$ (2) $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$

(3) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty\times 0$ (4) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty-\infty$

في هذه الحالات تكون النهاية غير معينة، وهناك طرق لإزالة عدم التعيين.

أولاً: عدم التعيين: $\frac{0}{0}$ Indeterminate form

ويزال بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالاختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع، أو باستعمال طرق أخرى مثل الضرب بمرافق بسط أو مقام يحوي جذر.

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$ عندما $x\to 4$.

الحل:

$$\lim_{x\to 4} = \frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\frac{0}{0}$$

يجب إزالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}\times\frac{\sqrt{x+12}+4}{\sqrt{x+12}+4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+12-16}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4+12}+4}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 4}=\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

من أجل $\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1\quad ;x\neq 0$

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^6-2x^5+x^4+5x^3-11x^2+7x-1}{x^6-x^5-x^3+x^2+2x-2}\right)$

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^6-2x^5+x^4+5x^3-11x^2+7x-1}{x^6-x^5-x^3+x^2+2x-2}\right)=\frac{0}{0}$

في هذه الحالة للتخلص من عدم، التعيين نقوم بإخراج $(x-1)$ عامل مشترك من البسط والمقام معا، وبالتحليل نجد:

البسط $=(x-1)^2(x^4-5x-1)$

المقام $=(x-1)(x^5-x^2+2)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^6-2x^5+x^4+5x^3-11x^2+7x-1}{x^6-x^5-x^3+x^2+2x-2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x^4-5x-1)}{(x-1)(x^5-x^2+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4-5x-1)}{(x^5-x^2+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-1)(1^4-5(1)-1)}{((1)^5-(1)^2+2)}=0$$

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\frac{0}{0}$

فمن أجل

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}\quad ;\, x\neq -3$$

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}$

الحل:

عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 3\ ;$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)}=2x+4$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}(2x+4)=10$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}$.

الحل: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ حيث x عدد موجب

عدم التعيين $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\frac{-8+24-24+8}{-2+2}=\frac{0}{0}$

باستخدام القسمة المطولة نحصل على: $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\frac{(x^2+4x+4)(x+2)}{(x+2)}$

ومنه من أجل $x\neq -2\ ;$ $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=x^2+4x+4$

وبالتالي فإن

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}x^2+4x+4=4-8+4=0$$

نـظريـة:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ حيث x عدد موجب

مثال:

لدينا $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0\ ,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^5}=0$

نـظريـة:

$$\lim_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.............+a_1x+a_\circ)=\infty$$

حيث أن $a_n, a_{n-1}, ..., a>0$

مثال:

أحسب نهاية الدالة: $f(x)=x^3+2x^2+5x+3$ عندما تسعى x إلى اللانهاية.

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2+5x+3)=\infty$$

ثانيًا: عدم التعيين: $\frac{\infty}{\infty}$ **Indeterminate form**

لإزالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ عندما يؤول المتغير x إلى ∞، نقسم البسط والمقام على المتغير حاملاً أكبر أس في البسط أو المقام.

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}$

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2}{x^2/x^2+1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x^2}=\frac{1}{1+0}=1$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3}$.

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}$

نقسم دوال الدالة على x^3فيكون لدينا.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x/x^3+5/x^3}{x^3/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2+5/x^3}{1}=\frac{0+0}{1}=0$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2}$.

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$ ، تقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2}=\lim_{x\to\infty} \frac{x^5/x^2+3/x^2}{x^2/x^2}=\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3/x^2}{1}=\infty$$

ثالثًا: عدم التعيين $0\times\infty$: Indeterminate form

لإزالة عدم التعيين $0\times\infty$ نطبق طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالاختصار والقيام بعملية الضرب والقسمة في حالة وجودهما للوصول إلى حالة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ وهذا ممكن دوماً أو الوصول إلى حل مباشر.

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)$.

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)=0\times\infty$

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}\left[3+\frac{2}{x-1}\right]\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(3+\frac{2}{x-1}\right)=3+\frac{2}{0-1}=1$$

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=\sin x\cot x$ عندما x تسعى إلى الصفر.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cot x=\lim_{x\to 0}\sin x\lim_{x\to 0}\cot x=0\times\infty$$

منها:

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cot x=\lim_{x\to 0}\sin x\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=x\,e^{x}$ عندما x تسعى إلى ∞.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0\times\infty$$

منها:
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x}}=0$$

رابعًا: نستعمل نفس الطريقة السابقة لإزالة عدم التعيين $\infty-\infty$:

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^{2}-1}\right)$

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^{2}-1}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^{2}-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(3-\frac{1}{(x+1)}\right)=\infty\times\frac{5}{2}=\infty$$

مبرهنة Theorem:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{n}-a^{n}}{x-a}=n\,a^{n-1} \quad : \quad a\in R$$

وبشكل عام فإن:

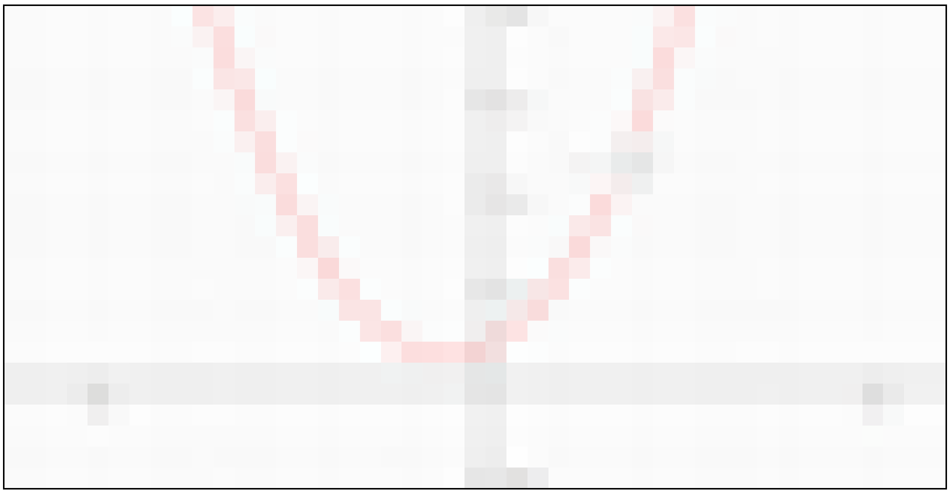
$$\lim_{x\to a}\frac{x^{n}-a^{n}}{x^{m}-a^{m}}=\frac{n}{m}a^{n-m} \quad : \quad a\in R$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$ مع رسم الدالة.

الحل:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$



مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$.

الحل:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x^2 - 4x + 16)}{(x+4)} = \lim_{x \to -4} (x^2 - 4x + 16) = 48$$

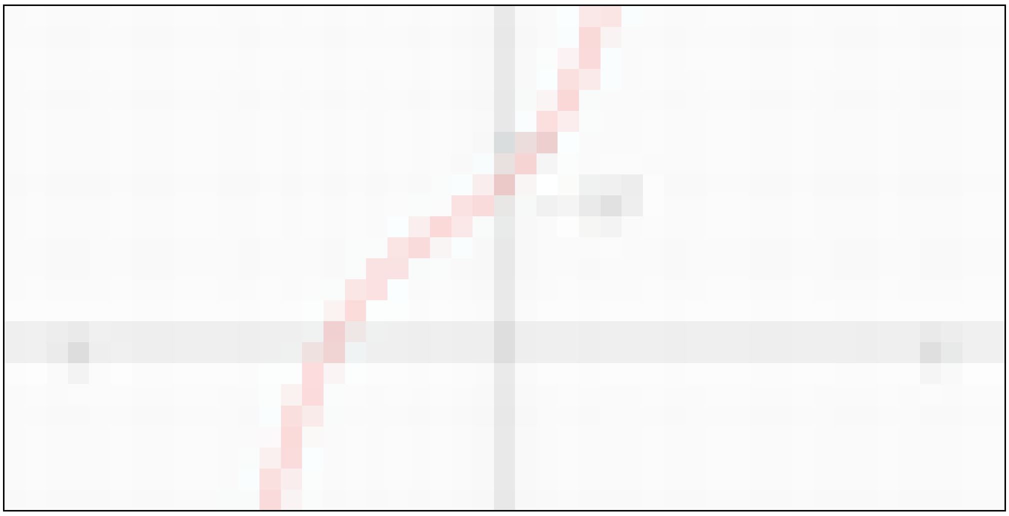
مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 4 \times 2^{4-1} = 4 \times 2^3 = 32$$



مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{x^3-27}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} \frac{x^4-3^4}{x^3-3^3} = \frac{4}{3}\times 3^{4-3} = 4$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{x\to 64} \frac{x^{\frac{1}{2}}-8}{x^{\frac{1}{3}}-4} = \lim_{x\to 64} \frac{x^{\frac{1}{2}}-(64)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}-(64)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big/\frac{1}{3}\times (64)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}\times (64)^{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}\times 2 = 3$$



مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{x+27-27}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{(x-27)+27}$$

$$=\frac{1}{3}\times(27)^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

نهاية بعض الدوال الشائعة: Limits some of Common functions

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$ 2) $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2.718$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)=0$ 4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ 5) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)=1$

نـظرية :

لنفرض أن $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

و $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$

إذا كانت $R(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ ، فإن :

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \begin{cases} \pm\infty & , \quad n>m \\ \frac{a_n}{b_n} & , \quad n=m \\ 0 & , \quad n<m \end{cases}$$

مثال:

أوجد النهاية التالية : $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9}$.

الحل:

بقسمة حدود الدالة بسط ومقام على x^5

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^5}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة: $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$ عندما $x\to\infty$.

الحل:

بقسمة البسط و المقام على x نجد: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+2}=\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2}{3x-6}}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to\infty$.

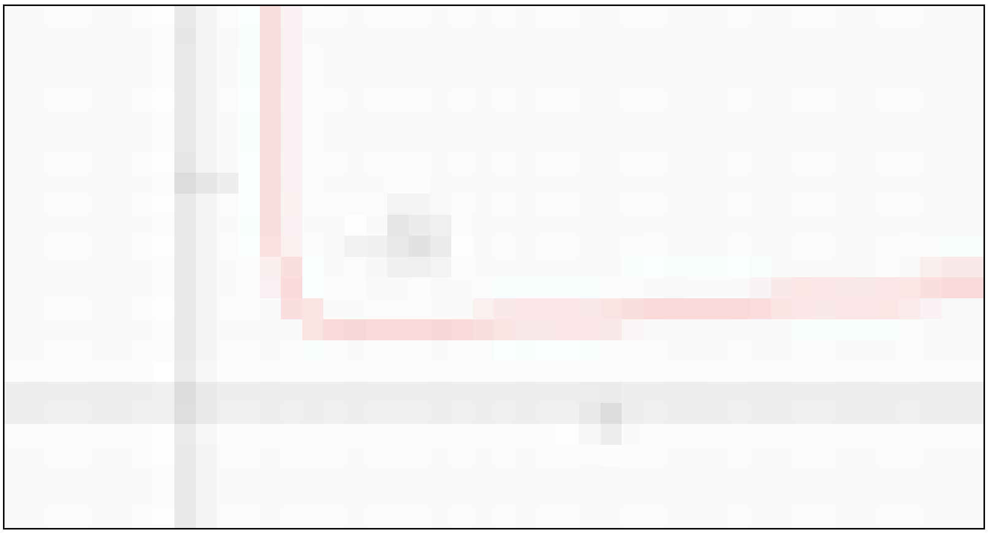
الحل:

نعوض عن $x=\infty$ منها نحصل على $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{3x-6}}=\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{3x-6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}/|x|}{(3x-6)/|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}/\sqrt{x^2}}{(3x-6)/x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2/x^2}}{(3-6/x)}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+2/x^2}}{\lim_{x\to+\infty}(3-6/x)}=\frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}(1+2/x^2)}}{\lim_{x\to+\infty}(3-6/x)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}1+2\lim_{x\to+\infty}1/x^2}}{\lim_{x\to+\infty}3-6\lim_{x\to+\infty}1/x}=\frac{\sqrt{1+2(0)}}{3-6(0)}=\frac{1}{3}$$



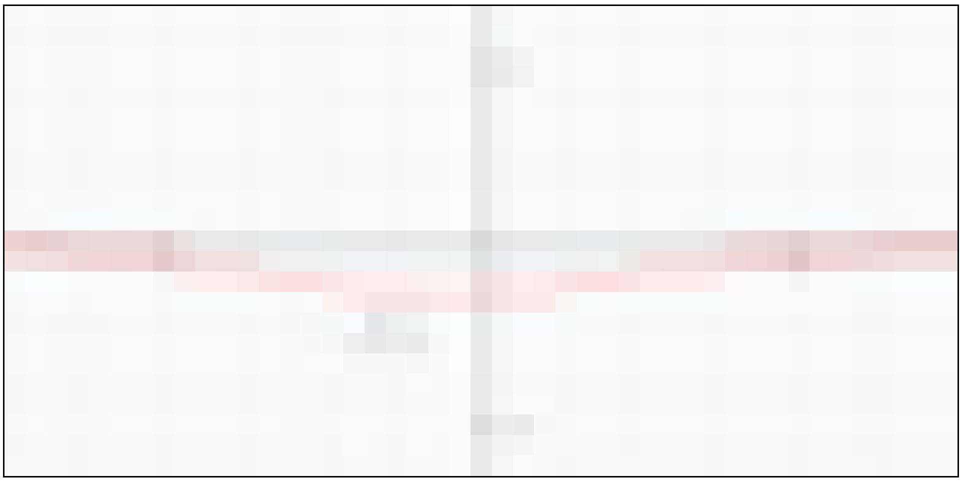
مثال:

إذا كانت $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{3x^2+x+2}$, أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x^2 نحصل على:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2-\dfrac{5}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = \frac{2}{3}$$



مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$ عندما x تؤول إلى الصفر.

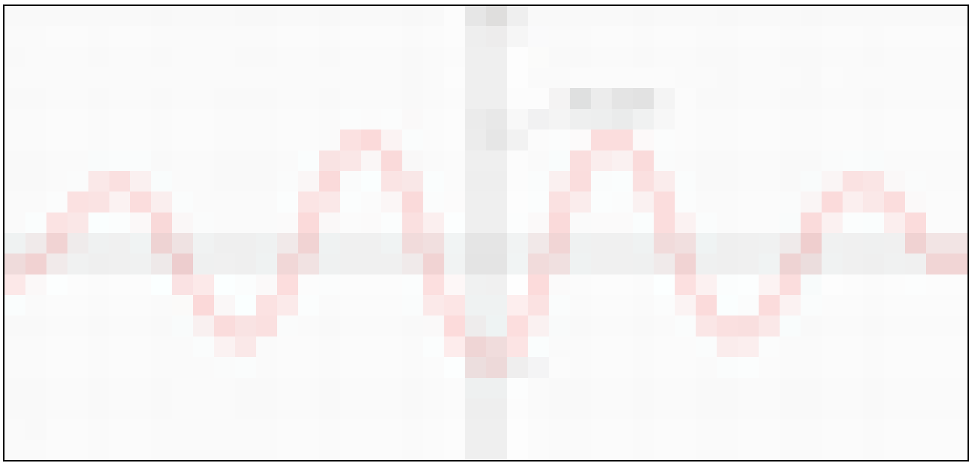
الحل:

نعلم أن: $\displaystyle Lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ وبالتالي:

$$Lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x} = Lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} - Lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$= Lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} - Lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x}$$

$$= 2 - 3 = -1$$



مثال:

احسب قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

الحل:

نقسم على 2^x ونوجد النهاية عندما $x \to \infty$ على الشكل التالي:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^x}}{1 + \frac{1}{2^x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x) = \frac{\tan 3x}{x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x}$ لذلك نعوض عن $\tan 3x$ بمتساوية فنحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3 \sin x}{3x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 3 \times 1 = 3$$

الدوال المتصلة (المستمرة) Continuous of Functions:

يقال عن الدالة أنها متصلة (مستمرة) في المجال $[a,b]$ إذا كان بالإمكان رسمها بدون انقطاع في النطاق $a \le x \le b$ "أي لا يوجد أي نوع من الانقطاع في المنحنى"

يعرف اتصال (استمرار) الدالة رياضيًا كالآتي:

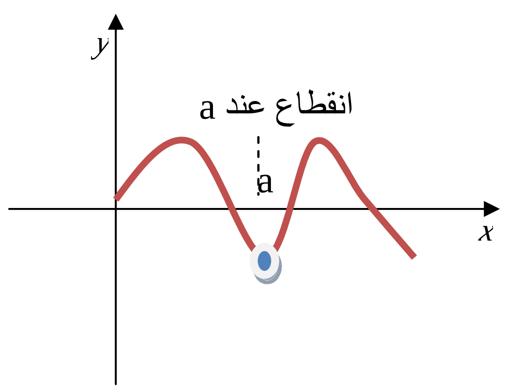
يقال عن الدالة f أنها متصلة (مستمرة) عند $x = a$ إذا توفرت في الدالة الشروط التالية:

شروط الاتصال: Continuous Condition

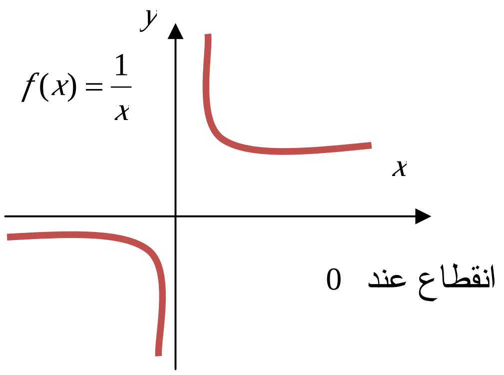
1. الدالة معرفة عند $x = a$ "قيمة الدالة عند a، $f(a)$ معرف " أي موجودة ومحدودة.
2. توجد نهاية للدالة عند $x \to a$ أي أن $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة.
3. إذا كانت للدالة قيمة عند $f(a)$ ؛فإنه يجب أن تساوي نهاية الدالة عند نفس النقطة $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

أما إذا كانت لم تتحقق الشروط السابقة "أو إحداها" فلن تكون الدالة متصلة (مستمرة).

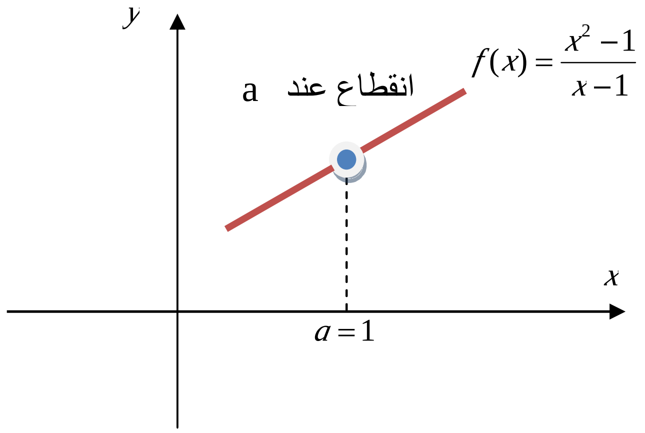
بعض أشكال الدوال غير المتصلة (المستمرة) منفصلة(منقطعة) عند نقطة أو أكثر



الحالة (2)



الحالة (1)



الحالة (3)

نلاحظ:

أنه بالنسبة للحالة رقم (1) مثلاً يمكن جعل هذه الدالة متصلة عند $x=1$،إذا تم تعريف الدالة عند 1 بالآتي $f(1)=\frac{1}{1}=1$ ، وبهذا تصبح نهاية الدالة عند $x\to1$ تساوي قيمة الدالة عند $x=1$. $\lim\limits_{x\to1} f(1)=f(1)$

في الحالة رقم (3) لا يمكن جعل الدالة متصلة عند نقطة الانقطاع، وذلك لعدم وجود نهاية للدالة عند نقطة الانقطاع.

أما في حالة رقم (2) يمكن أن تصبح الدالة مستمرة عند $x=a$ ، إذا أمكن تعريف قيمة للدالة $f(a)$ بحيث تصبح $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

مثال:

ناقش استمرار الدالة: $f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{x-3}\ ,\ x\neq3$ مع رسم الدالة.

الحل:

$$\because\ f(x)=\frac{(2x+1)(x-3)}{x-3}=2x+1\ ,\ x\neq3$$

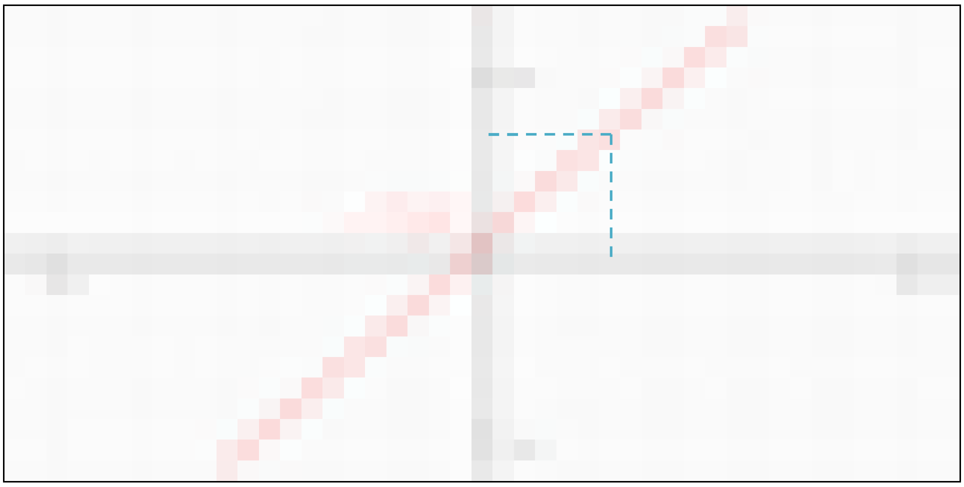
الآن نطبق شروط الاستمرارية:

الدالة غير معرفة عند $x=3$ أي أن $f(3)$ غير معرفة و

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$$

وبالتالي لو وضعنا $f(3)=7$ تصبح الدالة مستمرة ومعرفة كما في الشكل التالي:

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}2x^2-5x-3 & ,x\neq 3\\ 7 & ,x=3\end{cases}$$



مثال:

ناقش استمرارية الدالة $f(x)=\begin{cases}-2 & , x<0\\ 2 & , x\geq 0\end{cases}$ مع رسم الدالة .

الحل:

$$f(0)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

أي أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة، إذا الدالة غير مستمرة، لعدم توفر الشرطين الأول والثالث.



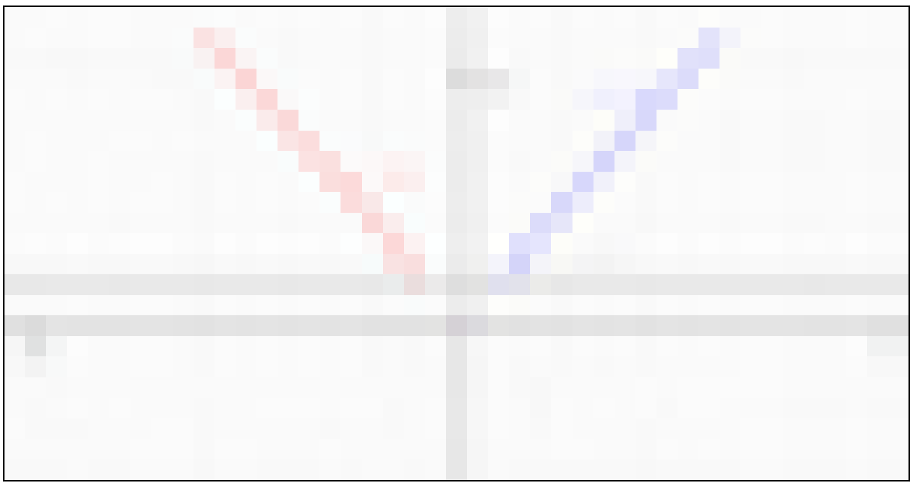
مثال:

ناقش اتصال الدالة $-1 \le x \le 1$ $f(x)=\begin{cases} -2x & , \quad x<1 \\ 2 & , \quad |x| \le 1 \\ 2x & , \quad x>1 \end{cases}$ مع رسم الدالة.

الحل:

حيث أن $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2=2$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x=2$ بذلك فإن النهاية معرفة وتساوي 2

وكذلك قيمة الدالة عند 2 $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=2$ هذا يعنى أن الدالة متصلة عند النقطة $x=1$

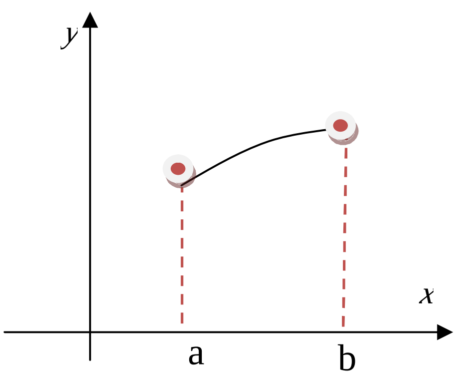


استمرار الدالة f خلال فترة محددة: Continuous Function on Bounded interval

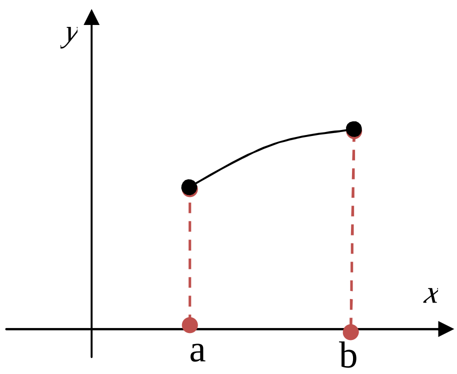
a. يقال للدالة f أنها دالة مستمرة في فترة مفتوحة، (a,b) إذا كانت الدالة مستمرة عند كل قيم x التي تنتمي إلى (a,b).

b. يقال للدالة f أنها دالة مسمرة في فترة مغلقة $[a,b]$ إذا كانت متصلة في (a,b) وكانت:

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=f(a) \qquad \lim_{x\to b^{-}} f(x)=f(b)$$



دالة مستمرة فى (a , b)



دالة مستمرة فى [a , b]

مثال:

ناقش استمرارية الدالة الآتية: $x \neq 4 \quad , \quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$.

الحل:

$$x^2-9\geq 0 \;\rightarrow\; x^2\geq 9 \;\rightarrow\; |x|\geq 3 \;\rightarrow\; -3\geq x\geq 3$$

البسط $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$

المقام $x-4\neq 0 \rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$

$$\therefore\; x\in(-\infty,-3)\cup[3,4)\cup(4,\infty)$$

وبهذا تكون الدالة مستمرة في هذا النطاق المبين فقط.

مبرهنة Theorem:

إذا كانت الدالتان f, g مستمرتين فإن :

دول الجمع $f+g$ ، والطرح $(f-g),(g-f)$ ، والضرب $(f*g)$, والقسمة $\left(\frac{g}{f}\right),\left(\frac{f}{g}\right)$ عدا قيم $f(x), g(x)$ التي تجعل المقام صفرًا ، دوال مستمرة .

ملاحظة:

1. كل دوال كثيرة الحدود مستمرة وكل دالة قياسية مستمرة أيضًا عند كل نقطة بحيث لا يساوي مقامها صفرًا على خط الأعداد الحقيقية.
2. كل دالة مثلثيه مستمرة عند كل نقطة تكون عندها الدالة معرفة.

مثال:

ناقش استمرار الدالة: $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6}$ مع رسم الدالة.

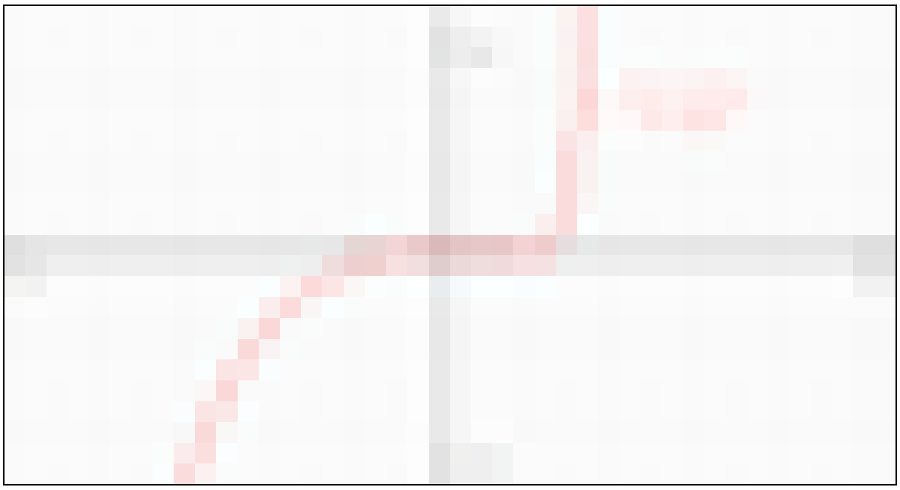
الحل:

من الواضح أن $f(x)$ دالة قياسية.

إذا $f(x)$ دالة مستمرة لكل الأعداد الحقيقية، عدا $x^2-5x+6=0$ ، عدا النقاط التي تحقق

$(x-3)(x-2)=0$ وهذا يعني $x=2\ , x=3$

إذا $f(x)$ مستمرة على $R-\{2,3\}$.

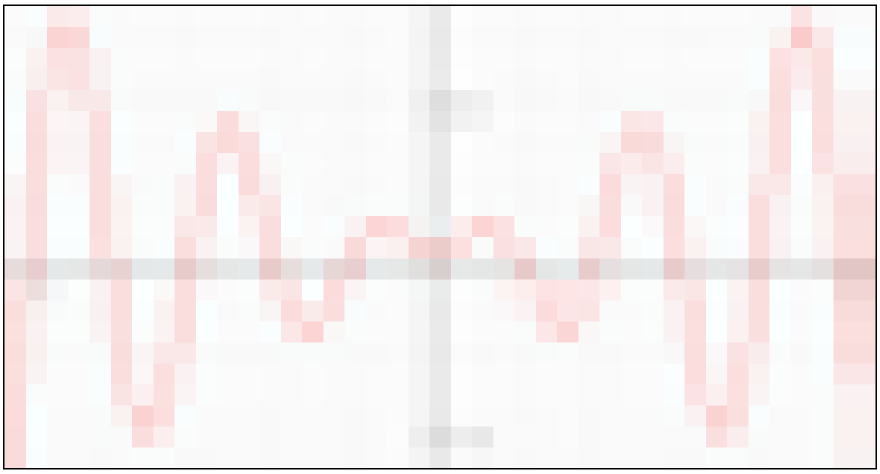


مثال:

اثبت أن الدالة $f(x)=x\sin x+1$ دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نعلم أن $g(x)=x$ دالة مستمرة عند أي عدد حقيقي، وكذلك الدالة $h(x)=\sin x$ دالة مستمرة على نطاقها وهو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، وكذلك الدالة $L(x)=1$ دالة ثابتة، وهي دالة مستمرة عند أي عدد حقيقي $f(x)=g(x)\times h(x)+L(x)$ أي أن $f(x)$ هي حاصل ضرب دالتين متصلتين، مضافاً إلى ذلك دالة مستمرة إذا $f(x)$ دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية.



مثال:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ارسم مخطط الدالة f واثبت أنها متصلة على الفترة $[-2,2]$

الحل:

نفرض أن c أي عدد بحيث

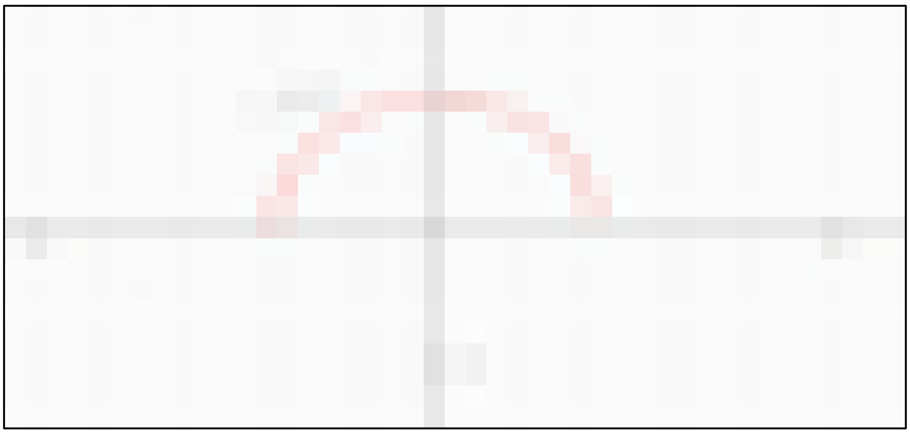
$$-2\le c\le 2 \quad \lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-c^2}=f(c)$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0=f(-2)$$

و

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0=f(2)$$

إذا الدالة f مستمرة على الفترة $[-2,2]$.



مثال:

اوجد الفترات التي تكون الدالة $f(x)=\dfrac{x^5+x^3+4x^2+2}{x^2-5x+6}$ عندها مستمرة .

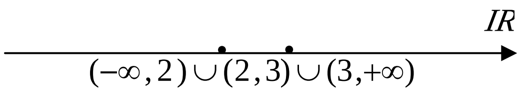
الحل:

$$x^2-5x+6=0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore \quad x=2 \quad or \quad x=3$$

إذا f مستمرة عند كل النقط ما عدا $x=2 \quad , \quad x=3$

إذا f مستمرة عند $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$



مثال:

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} a & if \quad x=-3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & if \quad -3<x<3 \\ b & if \quad x=3 \end{cases}$$

اوجد $a\,,\,b$ بحيث تكون الدالة f مستمرة على $[-3,3]$.

الحل:

بما أن f دالة مستمرة على $[-3,3]$ نوجد النهاية من اليسار واليمين

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3) = a$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = b$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} \times \frac{4+\sqrt{x^2+7}}{4+\sqrt{x^2+7}}$$
$$= \lim_{x\to -3^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{16-x^2+7} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(9-x^2)}$$
$$= 4+\sqrt{9+7} = 4+4 = 8$$
$$\therefore \quad a = 8$$

$$and \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} \times \frac{4+\sqrt{x^2+7}}{4+\sqrt{x^2+7}}$$
$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{16-x^2+7} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(9-x^2)}$$
$$= 4+\sqrt{9+7} = 4+4 = 8$$
$$\therefore \quad b = 8$$

مثال:

ادرس استمرارية الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$

الحل:

لدينا: $D_f = \left\{ x \in R : x \neq \left(-\frac{1}{2} \pm (n-1)\pi\right) \; ; \; n \in N \right\}$

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y} \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin y} \quad ; \quad y \in D_f$$

إذا الدالة مستمرة في الفترات المفتوحة: $\left(\left(-\frac{2}{3} + 2n\right)\pi \; ; \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\pi \right) \; ; n \in N$

$$\left(\left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\pi \; ; \left(\frac{3}{2} - 2n\right)\pi \right) \; ; n \in N$$

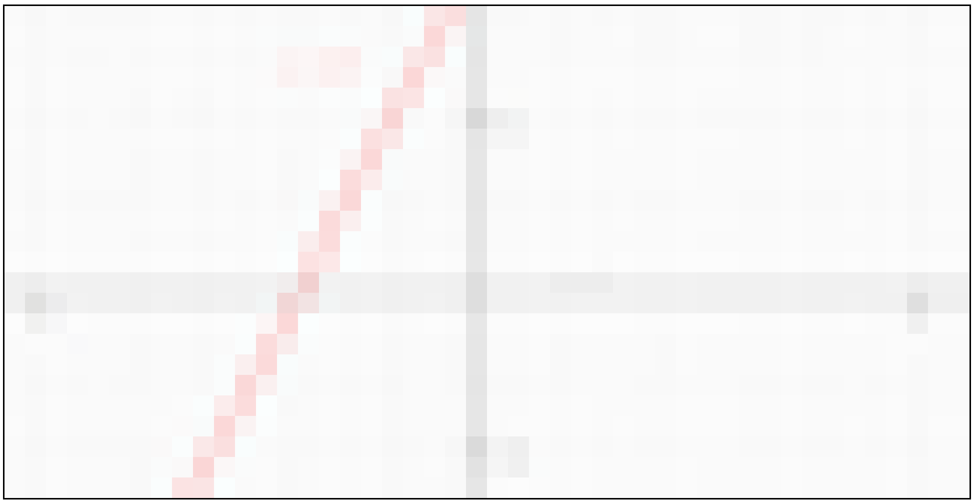
مثال:

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ بين إذا كانت الدالة مستمرة أم لا.

الحل:

واضح أن $f(0) = 0$ بينما $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

بذلك تكون: $f(0) \neq \lim_{x\to 0} f(x)$ بذلك فإن الدالة غير مستمرة.



مثال:

إذا كانت $f(x)$ هي الجدر النوني فإننا نحصل على.

الحل:

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

وعليه إذا كانت $g(x)$ دالة مستمرة فإن $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$

بذلك فإن الدالة مستمرة ولكن بشرط إن الجدر النوني موجود.

أمثلة محلولة

أوجد نهاية الدوال التالية:

1-إذا كانت $f(x) = \left(\frac{4x^2 + x}{2x}\right)^5$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 1$ نحصل على:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{4x^2 + x}{2x}\right)^5 = \left(\frac{4(1)^2 + 1}{2(1)}\right)^5 == \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{3125}{16}$$

2- إذا كانت $f(x) = (2x^3 + 5x + 2)$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 0$ موضحاً شكل الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 0$ نحصل على:

$$\lim_{x \to 0} (2x^2 + 5x + 2) = 2(0)^3 + 5(0) + 2 = 2$$



3- إذا كانت $f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 1$ نحصل على:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x}{x+1} = \frac{3(1)^2 + 2(1)}{(1)+1} = \frac{5}{2}$$

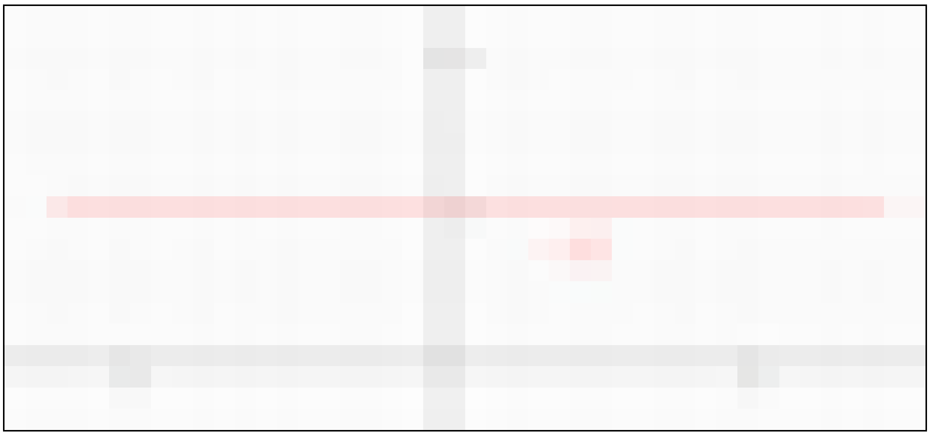
4-إذا كانت $f(x) = \frac{4-2x}{8-4x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 2$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{8-4x} = \frac{0}{0}$ نحصل على حالة عدم التعيين.

نحصل على: باستخدام الطرق التحليلية

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{8-4x} = \lim_{x\to 2} \frac{2(2-x)}{4(2-x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



5- إذا كانت $\underset{x\to 1}{f(x)} = \frac{x^3-1}{x-1}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 1$.

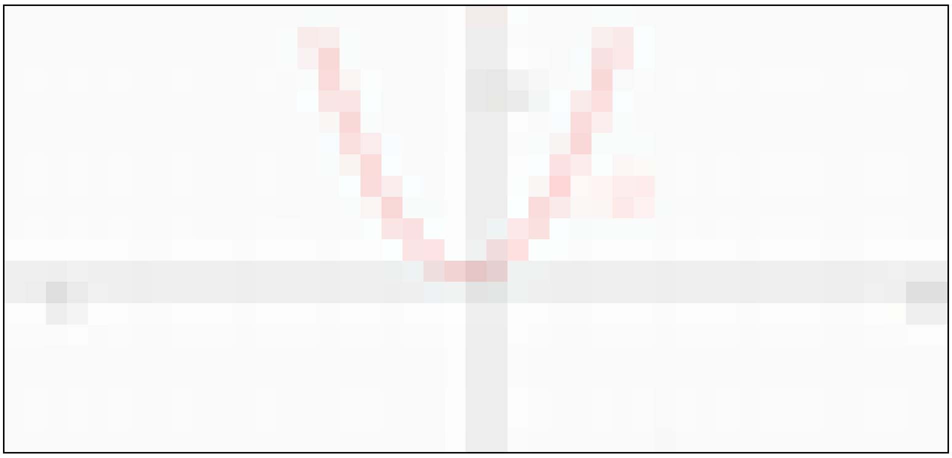
الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 1$ نحصل على حالة عدم التعيين

عدم التعيين $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 3$$



6-إذا كانت $f(x)=\dfrac{u^2+2u+1}{u+1}$، أوجد نهاية الدالة عندما $x\to -1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x=-1$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{u\to -1}\frac{u^2+2u+1}{u+1}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{u\to -1}\frac{u^2+2u+1}{u+1}=\lim_{u\to -1}\frac{(u+1)^2}{u+1}=\lim_{u\to -1}(u+1)=-1+1=0$$

7- إذا كانت $f(y)=\dfrac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $y\to 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $y=1$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\sqrt[3]{y}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(\sqrt[3]{y}-1)\left((\sqrt[3]{y})^2+\sqrt[3]{y}+1\right)}{\sqrt[3]{y}-1}$$

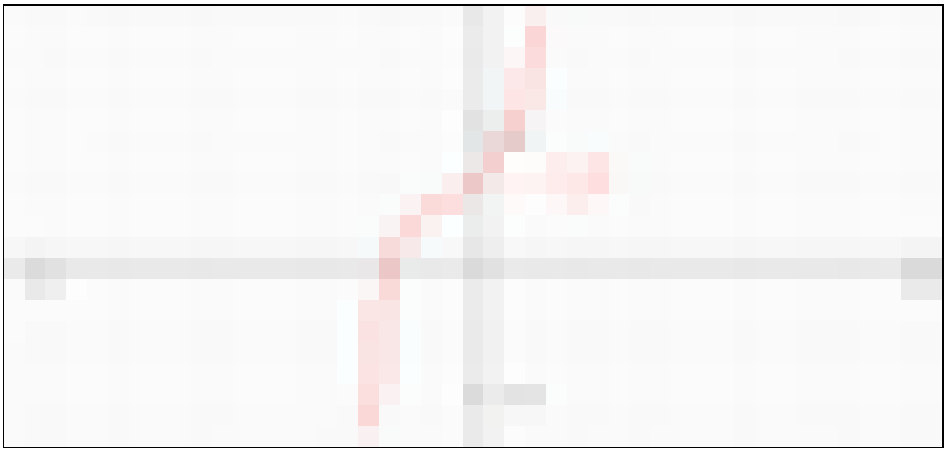
$$=\lim_{y\to 1}\left[(\sqrt[3]{y})^2+\sqrt[3]{y}+1\right]=1+1+1=3$$

8- أوجد نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{x^8 - 256}{x - 2}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 2$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^8 - 256}{x - 2} \lim_{x\to 2} \frac{x^8 - 2^8}{x - 2} = 8 \times 2^7 = 8 \times 128 = 1024$$



9- أوجد نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{2x^3 - 128}{x^2 - 16}$ عندما $x \to 4$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^3 - 128}{x^2 - 16} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x^3 - 2^3)}{x^2 - 16}$$

$$= 2 \lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 4^3}{x^2 - 4^2} = 2 \times \frac{3}{2} \times 4 = 12$$

10- أوجد نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{\sqrt[4]{x+81} - 3}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 4$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt[4]{x+81}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+8)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(x+81)^{\frac{1}{4}}-81^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+8)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(x+8)-8}\times\frac{(x+81)-81}{(x+81)^{\frac{1}{4}}-81^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{3}}{1}\times 8^{\frac{1}{3}-1}\right)\times\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\times 81^{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}\left(4\times\sqrt[4]{81^3}\right)=\frac{1}{4}\times 4\times 27=27$$

11- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 81$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{x^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}-81^{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}81^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$=2\times 3=6$$

12- إذا كانت $f(x)=\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 2$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x=2$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-2x+1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$$

13- إذا كانت $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 3$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 3$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x} = \frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$



14- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 3$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 3$ نحصل على:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$+\infty$ تشير إلى السلوك، وليس رقما على خط الأعداد.

15- إذا كانت $\underset{x \to 0}{f(x)} = \dfrac{2x^4 + 4x^2}{x^4 + 3x^2}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 0$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\underset{x \to 0}{Lim} \frac{2x^4 + 4x^2}{x^4 + 3x^2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\underset{x\to 0}{Lim} \frac{2x^4 + 4x^2}{x^4 + 3x^2} = \underset{x\to 0}{Lim} \frac{x^2(2x^2 + 4)}{x^2(x^2 + 3)} = \underset{x\to 0}{Lim} \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 3} = \frac{4}{3}$$

16- إذا كانت $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 0$.

الحل:

بالضرب في مرافق البسط $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ نحصل على

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \times \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



17- إذا كانت $f(h) = h\left(1 + \dfrac{1}{h}\right)$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $h \to 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $h = 0$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{h \to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right) = 0 \times (1+\infty) = 0 \times \infty$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

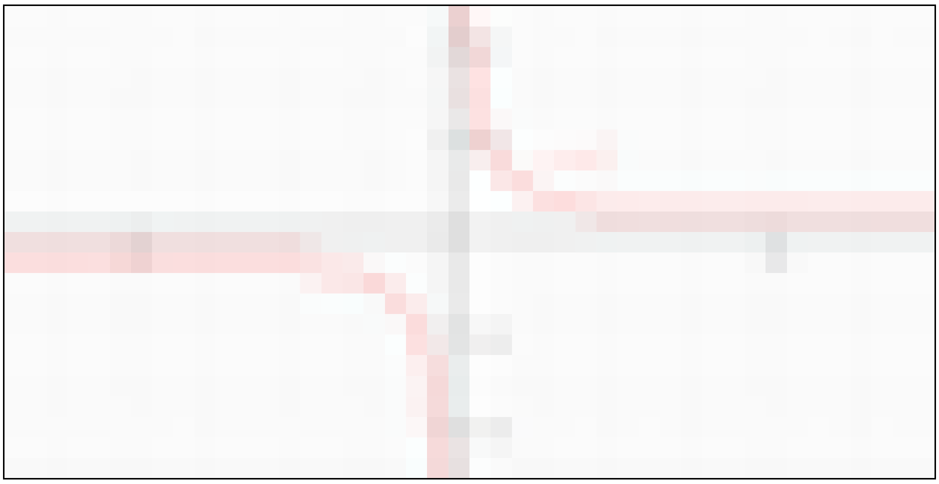
$$\lim_{h \to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right) = \lim_{h \to 0} h\left(\frac{h+1}{h}\right) = \lim_{h \to 0} (h+1) = 1$$

18- إذا كانت $f(x) = \left(4x + \frac{1}{x}\right)$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 0$

الحل:

نعوض عن $x = 0$ منها نحصل على

$$\lim_{x \to 0} \left(4x + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$



19- احسب نهاية الدالة $f(x) = \frac{\tan 3x}{x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

نعلم بأن الدالة $\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ أي أن:

$$\lim_{x \to 0} = \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} \times \frac{1}{\cos 3x}$$

$$= 3\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 3x} = 3 \times 1 = 1$$

20- احسب نهاية الدالة $f(x)=\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ عندما $x\to 1$.

الحل:

بالضرب في مرافق المقام $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ نحصل على:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{-(1-x)}\times\sqrt{x}-1$$

$$=\lim_{x\to1}-\frac{\sin(1-x)}{(1-x)}\times\lim_{x\to1}(\sqrt{x}-1)=0$$

21- احسب نهاية الدالة $f(x)=\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$ عندما $x\to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{3x}=2-3=-1$$



22- احسب نهاية الدالة $f(x)=\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ عندما $x\to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

نعلم بأن الدالة $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ أي أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\times\frac{1}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin 3x} = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

23- احسب نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{5x+\tan 3x}{7x-\sin 5x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+\tan 3x}{7x-\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5+\dfrac{3\tan 3x}{3x}}{7-\dfrac{5\sin 5x}{5x}} = \frac{5+3}{7-5} = 4$$

24- احسب نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3}$ عندما $x \to 0$.

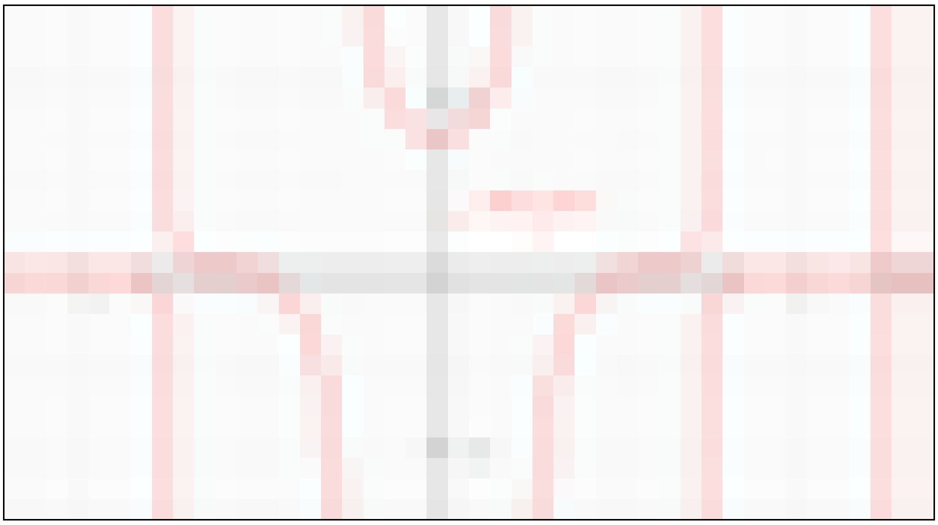
الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-\sin 2x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{\dfrac{1}{\cos 2x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{1-\cos 2x}{x^2}\times\frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\times\frac{2\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{\cos 2x} = 2\times 2\times 1 = 4$$



25- إذا كانت $f(x) = \frac{3x+5}{6x-8}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x نحصل على $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\,x/x + 5/x}{6\,x/x - 8/x}$

نعوض عن $x = \infty$ يكون لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

26- إذا كانت $f(x) = \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x^3 والتعويض عن $x = \infty$ نحصل على:

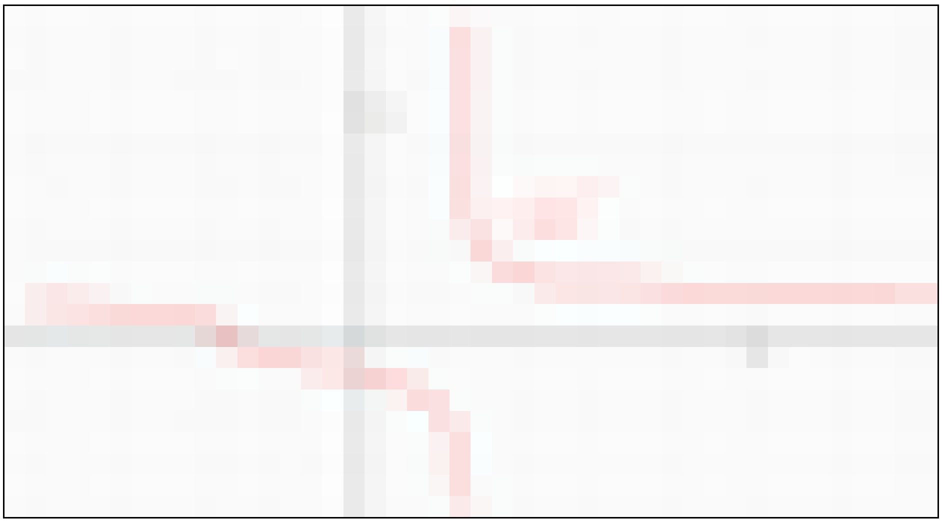
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2/x^3 - x/x^3}{2x^3/x^x - 5/x^3} = \frac{0}{2} = 0$$

27- إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x والتعويض عن $x = \infty$ نحصل على:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to +\infty} \frac{3x/x+5/x}{6x/x-8/x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$



28- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\frac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}$ عندما $x\to\infty$.

الحل:

بالقسمة على x^3 والتعويض عن $x=\infty$ نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x^3}}=\frac{3}{7}$$

29- احسب نهاية الدالة $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ عندما $x\to\infty$.

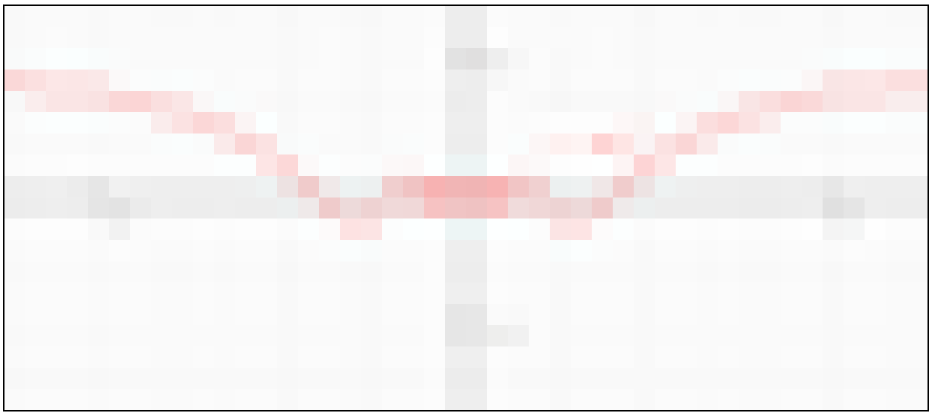
الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

نفرض متغير أخر $t=\frac{1}{x}$ منها نجد أن $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$ بذلك يكون لدينا:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$



30− إذا كانت $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-2}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-2} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2}$$

$$= e \times 1 = e$$

31− إذا كانت $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x+4-4}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x+4} \times \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{-4}$$

$$= e$$

32− إذا كانت $f(x) = \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x+4}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

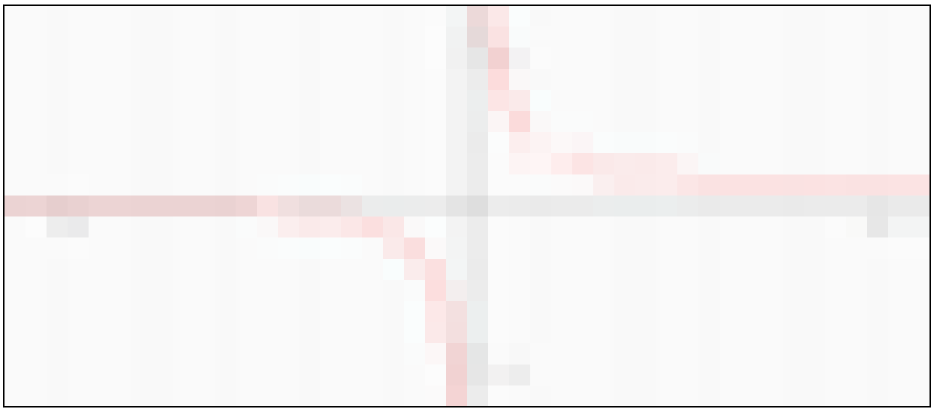
الحل:

من خواص الدوال الآسية وبفرض $x = 5t$ نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{5t+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{5}\times\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4}$$

$$=e^{5}\times 1=e^{5}$$



33- أوجد نهاية الدالة $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc x}{x^2+1}$.

الحل:

من خواص الدوال المثلثية يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\csc x}{x^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}}{x^2+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

34- أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}=\frac{0}{0}$$

بضرب النهاية في المقدار $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$= 1 \times \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

وليجاد نهاية المقدار $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}$ نضرب في المرافق على الشكل التالي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$



35− أوجد نهاية الدوال التالية عندما $x \to 0$:

$f(x) = \cosh x$ $\qquad$ $f(\text{x}) = \sinh x$

$f(x) = \coth x$ $\qquad$ $f(x) = \tanh x$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \sinh x = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \cosh x = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\tanh x=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{0}{2}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\coth x=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{1}{0}=\infty$$

36− أوجد نهاية الدالة:

$1-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{x}$ $\qquad 2-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{x}$

الحل:

نستخدم خواص الدوال الزائدية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2x}-\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2x}$$
$$=\infty-\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2xe^{x}}=\infty-0=\infty$$

وكذلك بنفس الطريقة نحصل على:

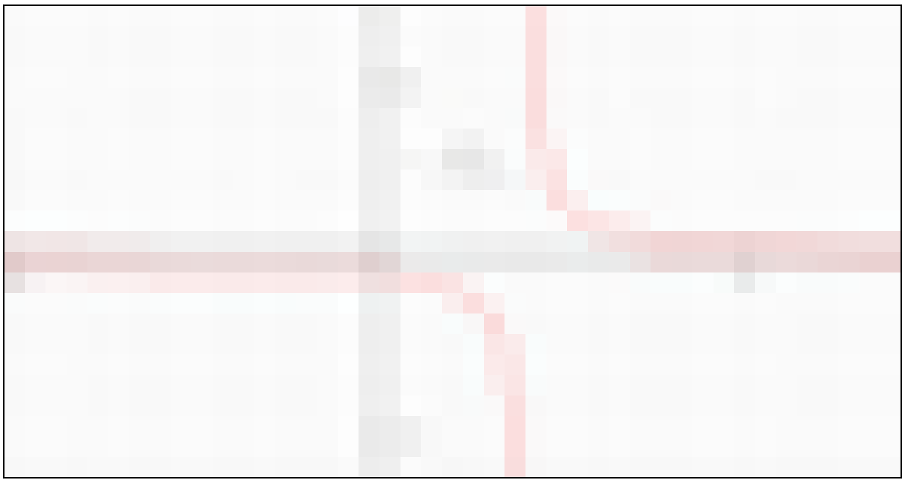
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2x}+\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2x}$$
$$=\infty+\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2xe^{x}}=\infty+0=\infty$$

37− أدرس استمرارية الدالة التالية $f(x)=\dfrac{3x+3}{x^{2}-3x-4}$

الحل:

$$f(x)=\frac{3x+3}{(x-1)(x-4)}$$

الدالة غير مستمرة عند $x=1$, $x=4$ فتكون مستمرة عند جميع R ماعدا هاتين النقطتين.



38- ادرس استمرارية الدالة عند $x = 2$ حيث أنَّ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , \ x \neq 2 \\ 3 & , \ x = 2 \end{cases}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 0} (x + 2) = 4$$

الدالة غير مستمرة عند النقطة 2

39- أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة مستمرة $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} \ . \ \sqrt{25 - x^2}}{x - 4}$.

الحل:

نوجد قيمة x .

$x^2 - 9 \geq 0$ منها $-3 \geq x \geq 3$

$25 - x^2 \geq 0$ منها $5 \geq x \geq -5$

بذلك نجد إن: $x - 4 \neq 0$ وهذا يؤدي إلى $R - \{4\}$

يتم إيجاده هو جميع الفترات التي تكون فيها الدالة مستمرة والآن يتم إيجاد تقاطع هذه الفترة لتكون النتيجة $[-5 \ , \ -3] \cup [3 \ , \ 4) \cup (4 \ , \ 5]$

هذه هي الفترات التي تكون عندما الدالة مستمرة.

40- ناقش استمراري الدالة $f(x)=|x-3|$ عند $x=3$.

الحل:

نعلم بأن:

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases}x-3 & , \quad x-3\geq 0\\ -x+3 & , x-3<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-3 & , \quad x\geq 3\\ -x+3 & , \quad x<3\end{cases}$$

وبالتالي يكون: .1 $f(3)=3-3=0$

.2 $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=3-3=0$

.3 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-3)=-3+3=0$

إذا: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0=f(3)$ الدالة مستمرة عند $x=3$ وعند كل نقاط IR.

41- ناقش استمرارية الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & , \quad x\neq 0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$.

الحل:

ندرس خواص الدالة:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & , \quad x\neq 0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{-x}{x} & , \quad x<0\\ \frac{x}{x} & , \quad x>0\\ 1 & \quad x=0\end{cases}=\begin{cases}-1 & , \quad x<0\\ 1 & , \quad x>0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$$

وبالتالي يكون:

.1 $f(0)=1$

.2 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

.3 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

الدالة غير مستمرة عند $x=0$.

42- إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الأعداد الحقيقية على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & , \quad x<1 \\ bx^3+b & , \quad 1\le x\le 2 \\ x & , \quad x<1 \end{cases}$$

أوجد قيمة b,a لتكن $f(x)$ دالة مستمرة.

الحل:

نناقش استمرارية الدالة عند $x=1$ وعند $x=2$ أي نحسب النهايات من اليمين ومن اليسار عند هاتين القيمتين:

1- عندما $x=1$ على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(bx^3+b)=2b \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1$$

لكي تكون $f(x)$ مستمرة عند $x=1$ يجب أن تكون النهايتان السابقتان متساويتين أي أن $2b=1$ منها تكون قيمة $b=\frac{1}{2}$.

2- عندما $x=2$ على النحو التالي:

واضح أن: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4+a$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)=9b$

لكي تكون $f(x)$ مستمرة عند $x=2$ يجب أن تكون النهايتان السابقتان متساويتين أي أن $a=\frac{1}{2}$.

Summary

- We say that the number L is the limit of $f(x)$ as x approaches to a and write $\lim_{x\to a} f(x) = L$ If for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that:

  $|f(x)-L|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-a|<\delta$

- Some common limits :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m} \quad , \quad \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- If $f(x)$ is defined near a for $x > a$, and that as x gets close to a when ever $f(x)$ gets close to L, is the right hand limit of $f(x)$ as x approaches a and we write : $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
- If $f(x)$ is defined near a for $x < a$, and that as x gets close to a when ever $f(x)$ gets close to L, then we say that L is the left hand limit of $f(x)$ as x approaches a and we write:

  $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

- Theorem:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ exists if and only if the following conditions hold:

$I - \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ *exists*

$II - \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *exists*

$III - \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *exists*

- The function $f(x)$ is continuous at the point $x = a$ if the following conditions hold:

exists $I - f(a)$

exists $II - \lim_{x\to a} f(x)$

$III - \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

- The function $f(x)$ is continuous on an open interval (a, b) if the function $f(x)$ is continuous at any point of (a, b).
- The function $f(x)$ is continuous on a closed interval $[a, b]$ if the function $f(x)$ is continuous on (a, b) and the function is defined at a, b such that :

- Theorem:

If $f(x)$ is and $g(x)$ are two continuous functions at $x = a$,then:

1. $(Cf)(x) = Cf(x)$ is continuous function at $x = a$.
2. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ is continuous function at $x = a$.
3. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ is continuous function at $x = a$.
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ is continuous function at $x = a$.

****

تمارين على الفصل الثالث

س1: أوجد نهاية الدوال التالية أن وجدت ☜

:1 $a-\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{(x-4)^3}$ ، $b-\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{(x-4)^3}$ ، $c-\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^3}$

:2 $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}$:3 $\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{(x-4)^3}$

:4 $\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{(x-4)^3}$:5 $\lim_{x\to 3}(3x+4\sqrt{x})$

س2: أوجد قيم كل من النهايات التالية مع رسم بينها:☜

:1 $b-\lim_{x\to -3}\frac{(x^2-27)}{x-3}$ $a-\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-27)}{x-3}$

:2 $\lim_{x\to 4}(x^3-4x^2+2x-6)$

:3 $\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^3}$:4 $\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^3-a^3}{x}$

:5 $\lim_{x\to 4}\frac{(1/\sqrt{x})-\frac{1}{2}}{x-4}$

س3: أوجد قيم النهايات التالية مستخدماً نظريات النهايات:☜

:1 $\lim_{x\to -2}\frac{(x^3-3x+1)}{x}$:2 $\lim_{x\to 9}(x^9-3x+4\sqrt{x})$

:3 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$:4 $\lim_{x\to 81}\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}$

:5 $\lim_{x\to -1}\frac{(2x+3)^{-3}-1}{(3x+4)^5-1}$:6 $\lim_{x\to 0}\frac{5x+\tan 3x}{7x-\sin 5x}$

:7 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$:8 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$

:9 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}$:10 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt[4]{x+81}-3}$

:11 $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

:12 $\lim_{x\to 4}\frac{2x^3-128}{x^2-16}$

:13 $\lim_{x\to -1}\frac{(2x+3)^{-3}-1}{(3x+4)^5-1}$

:14 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

س4: أوجد قيم النهايات التالية مستخدماً القواعد السابقة في حالة $x\to\infty$: ☞

:1 $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

:2 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-2}$

:3 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^3+x+1}$

:4 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3}$

:5 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x+4}$

:6 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}$

:7 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+4}\right)^{x}$

:8 $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2+5x}\right)$

:9 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2\sqrt{x}}{4x^2-5x-2}$

:10 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-2x+5}{x^3+2x^2+7x+3}$

:11 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{(3x+2)^5}}\right)$

:12 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x-9}{3x^2-3x+7}$

:13 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+10}\right)$

:14 $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

:15 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$

س5: أوجد قيم النهايات الآتية: ☞

:1 $f(x)=\begin{cases}2x-5 & , \quad x>3\\ 1 & , \quad x<3\end{cases}$ عندما $x\to 3$

:2 $f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x\geq -1\\ 2x+3 & , \quad x<-1\end{cases}$ عندما $x\to -1$

س6: ناقش استمرارية الدوال التالية عند النقطة المبينة:☞

:1 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-1|}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ 1 & , \quad x=1\end{cases}$ عند $x=1$

2: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & , \quad x\neq 3\\ 6 & , \quad x=3\end{cases}$ عند $x=3$

3: $f(x)=\begin{cases}2x & , \quad x\geq 2\\ 6-x & , \quad x<2\end{cases}$ عند $x=2$

4: $f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<0\\ 0 & , \quad x=0\\ 1 & , \quad x>0\end{cases}$ عند $x=0$

س7: أوجد قيم النهايات الآتية ثم ادرس اتصال(استمرار) الدوال عند النقط الموضحة أمام كل منها:☜

1: $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}$ حيث $x=0, \quad x=1$

2: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x^{-3}-9}{x^2-4x+3}$ حيث $x=3, \quad x=4$

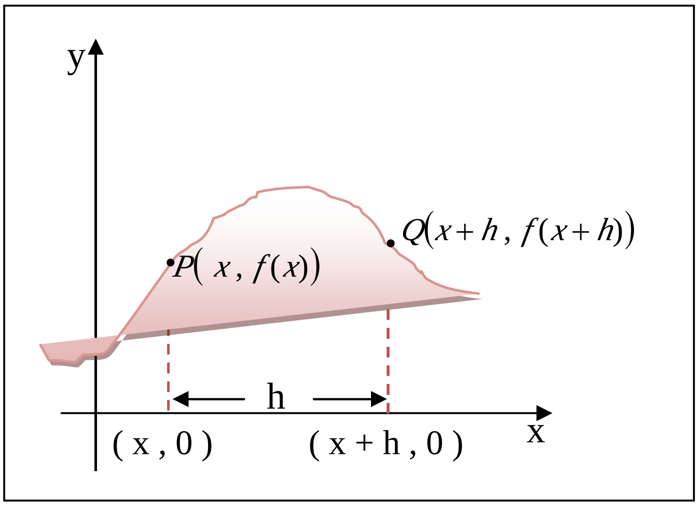
3: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x-6}-\sqrt{x}}$ حيث $x=4, \quad x=2$

4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ حيث $x=1, \quad x=-3$

****

المشتقة The Derivatives

ليكن لدينا منحني الدالة $f(x)$ ، ونأخذ النقطتين $(x\,,\,f(x))$ و $Q[x+h\,,\,f(x+h)]$ وعندها يكون h البعد بين النقطتين $(x,0)$ و $(x+h,0)$ على المحور X كما في الشكل التالي:



عندها يكون ميل الخط المستقيم $\overline{PQ}$:

$$m_{pQ}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

وعندما $h\to 0$ فإن النقطة Q تقترب من النقطة P ، ويصبح المستقيم PQ مماسًا لمنحنى الدالة f عند النقطة $P(x,f(x))$ ، ويكون ميله هو النهاية:

$$m_{pQ}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=L$$

حيث L عدد حقيقي محدود وحيث رمزنا لقيمة النهاية بالرمز $f'(x)$.

تسمى $f'(x)$ بالمشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $(x,f(x))$ وللمشتقة تفسير هندسي هام. فالشكل البياني لدالة نمطية f مخطط كما في الشكل التالي:

لتكن $P(x,f(x))\,,\,Q(u\,,f(u))$ نقطتين على منحنى الدالة f ، وميل الخط PQ المار

بالنقطتين Q و P والمستنتج من إحداثيات هاتين النقطتين هو: $\frac{(f(u)-f(x))}{(u-x)}$ إذا كانت الدالة f مستمرة عند x.

فإنه عندما تقترب u من x ، تتحرك Q على المنحنى ناحية P، والخط المستقيم PQ يدور حول P، وتقترب من المماس للمنحنى عند P.

لنفترض أنه في نفس الوقت يقترب ميل PQ من ميل المماس، ويمكن جعله يقترب منه كما نريد باختيار u قريبة قربًا كافيًا من x، لكن ذلك مجرد عملية نهائية ، ويمكن أن نقول:

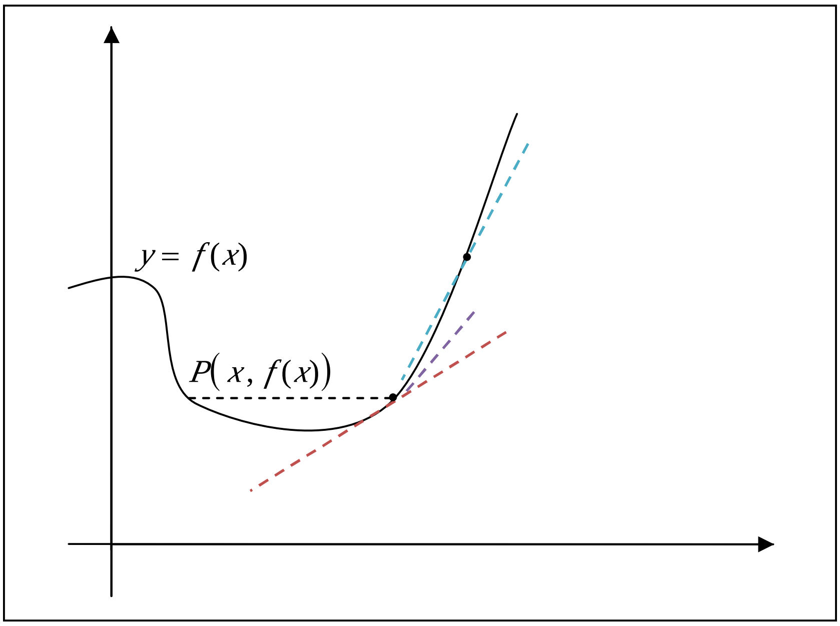
ميل المماس عند P يساوى $\lim\limits_{u\to x}$ (ميل PQ)؛ إي أن:

$$\lim_{h\to 0} PQ = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

حيث h تعبر عن المسافة الأفقية بين Q و P بشرط وجود هذه النهاية

(يجب أن نأخذ في الاعتبار قيم u الأقل من و الأكبر من x)

أي أن مشتقة الدالة f عند x هي ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$.



إن للمشتقة أيضا معنى فيزيائي هام، فهي تعيين معدل تغير الدالة في أي موضع بالنسبة لمتغيرها كما أنها تمثل القيمة العددية لميل المماس لمنحني الدالة في الموضع المحدد بـــ x .

مثال:

إذا كانت $f(x)=x^2$. فاوجد $f'(a)$ لأي a باستخدام التعريف السابقة.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to a} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

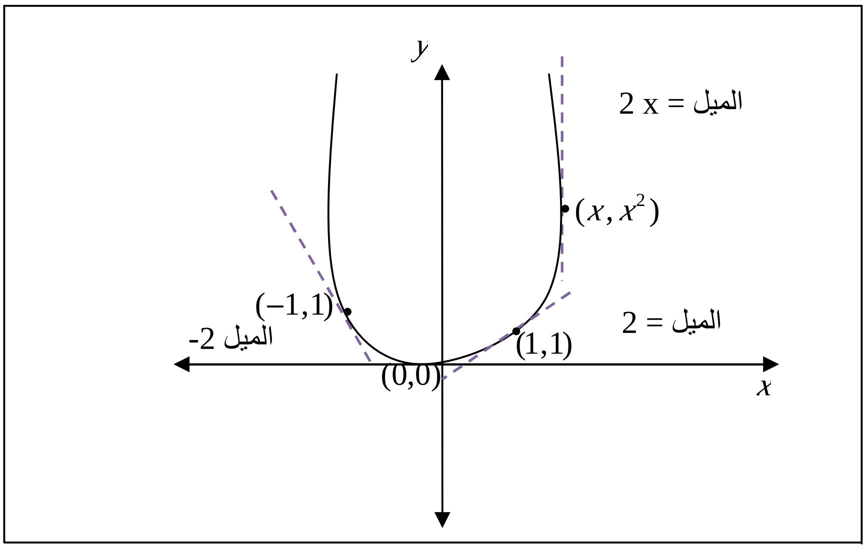
$$= \lim_{h\to a} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to a} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= 2x$$

$$\lim_{x\to a} 2x = 2a$$

في هذا المثال أثبتنا أن الدالة $f(x)=x^2$ لها المشتقة $f'(x)=2x$. هذا هو ميل المماس للمنحنى y عند النقطة (x,x^2) في منحنى الدالة $y=x^2$ ، مثلا يكون ميل المماس عند النقطة $(1,1)$ هو $f'(1)=2$.

وميل المماس عند النقطة $(2,4)$ هو $f'(2)=4$ وعندما تزداد x تتحرك النقطة (x,x^2) لأعلى على طول النصف الأيمن للمنحنى والميل $2x$ للمماس يزداد.



عند نقطة الأصل $x=0$ تكون $f'(0)=0$ ، و ميل المماس عند النقطة $(-1,1)$ هو $f'(-1)=-2$ و للنقط على النصف الأيسر للمنحنى $(x<0)$ يكون ميل المماس عند كل نقطة سالباً.

تعريف:

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة تحتوي العدد x؛فإن المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $P=(x, f(x))$ تعرف بالنهاية:

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بشرط وجود النهاية .

ملاحظات عامة:

1. المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $(x=a)$ هي النهاية:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وتمثل ميل المستقيم المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$.

2. نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة a إذا كانت النهاية التالية موجودة:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

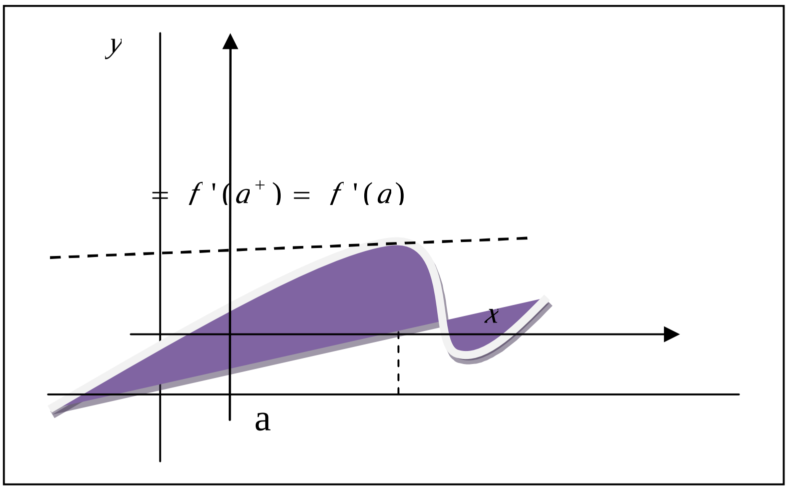
وهذا يعني أن النهايتان:

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad ، \quad f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

معرفتان ومتساويتان.

وتسمى $f'(a^-)$ بالمشتقة اليسرى عند العدد (a)

$f'(a^+)$ بالمشتقة اليمنى عند العدد (a)



مثال:

أوجد $g'(x)$ إذا كانت:

$$g(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x<1 \\ -x^2+x, & x\geq 1 \end{cases}$$

الحل:

$$g'(1^-)=\lim_{u\to 1^-}\frac{g(u)-g(1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^-}\frac{(u^2-3u+2)-0}{u-1}$$

$$=\lim_{u\to 1^-}\frac{(u-2)(u-1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^-}(u-2)=-1$$

$$g'(1^+)=\lim_{u\to 1^+}\frac{g(u)-g(1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^+}\frac{(-u^2+u)-0}{u-1}$$

$$=\lim_{u\to 1^+}\frac{-u(u-1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^+}(-u)=-1$$

إذن $g'(1^-)=g'(1^+)$ وبالتالي فإن $g'(1)$ موجودة وتساوي (-1)

مثال:

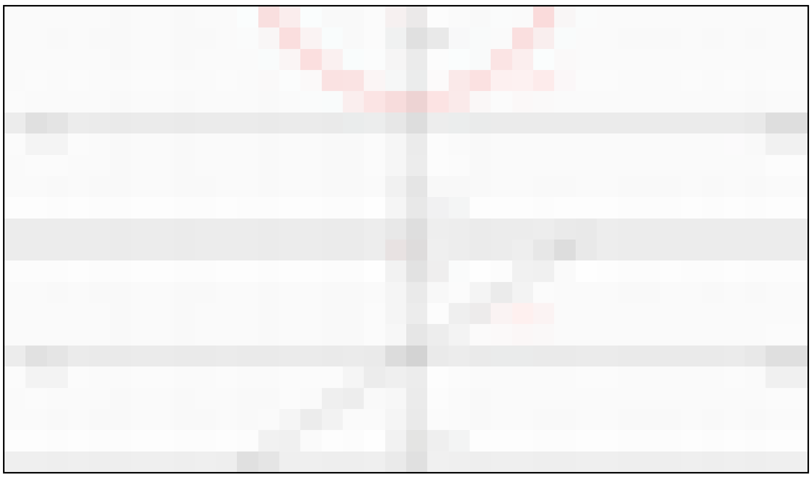
أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(t)=2+3t^2$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$S'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(x)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3(t+\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6t\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(6t+3\Delta t)=6t$$



3. نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في $a<c<b$.

4. نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة ومعرفة عند الطرفين أي أن:

$$\lim_{h \to a^+} f(x) = \lim_{h \to a^+} f(a)$$

$$\lim_{h \to b^-} f(x) = \lim_{h \to b^-} f(b)$$

5. إذا كانت $y=f(x)$ فإنه يرمز للمشتقة الأولى بالرموز التالية:

$$f'(x) = D_x\left[f(x)\right] = D_x y = y'$$
$$= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

علمًا بأنه:

بوضع $u=x+h$ فإنه عندما $h \to 0$ فإن $u \to x$ وإن:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

فتصبح المعادلة:

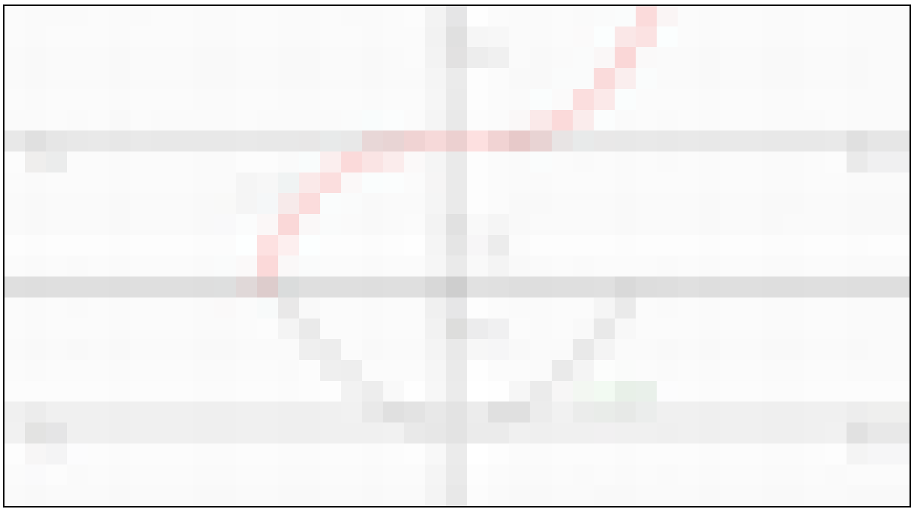
$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$$

مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = x^3$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$
$$f(x+h) - f(x) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = h\left(3x^2 + 3xh^1 + h^2\right)$$
$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$
$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2$$



مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x)=\sqrt{3x-7}$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-7}-\sqrt{3x-7}}{h}$$

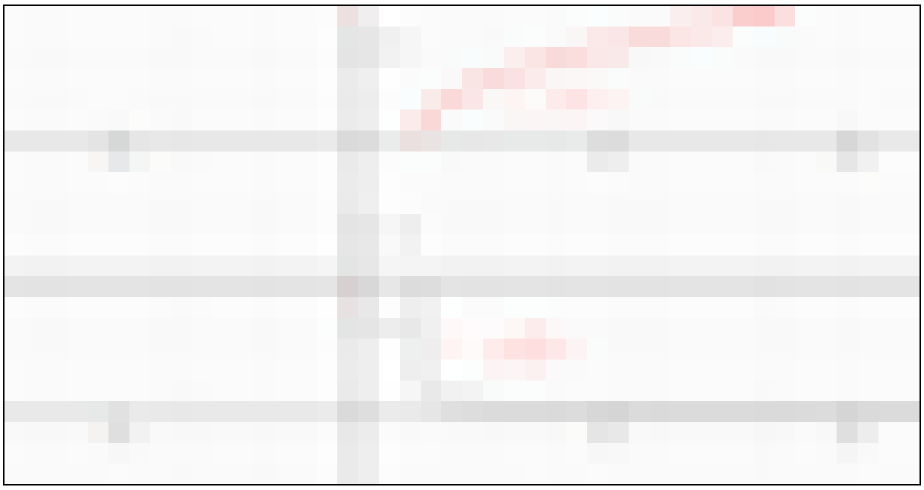
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-7}-\sqrt{3x-7}}{h}\times\frac{\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-7-(3x-7)}{h\left(\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-7-3x+7}{h\left(\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-7}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$



مثال:

اثبت أن الدالة $f(x)=|x|$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

الحل:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}\ \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

$\therefore$ المشتقة غير موجودة عند $x=0$

مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة:

$f(x)=2x^3-5x^2+x$.

الحل:

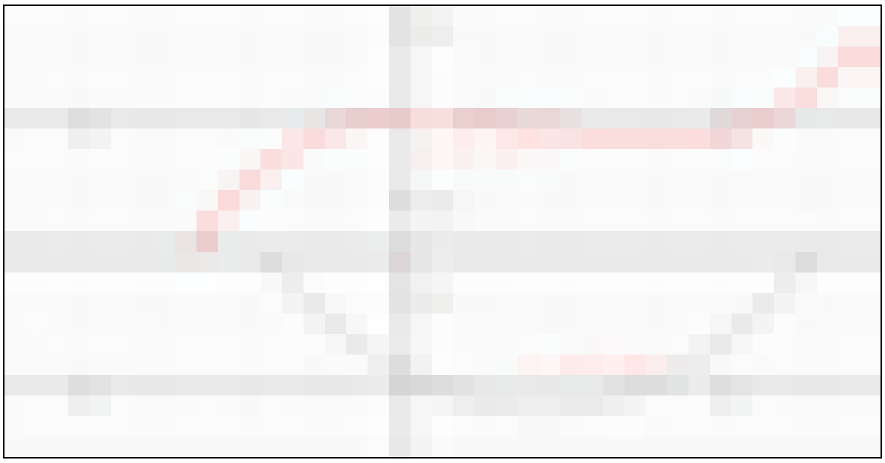
$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-5(x+h)^2+(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-5x^2-10xh-5h^2+x+h-2x^3+5x^2-x}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x^2+6xh+2h^2-10x-5h+1)}{h}$$

$$\therefore\ f'(x)=6x^2-10x+1$$



مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = -6x^2 + x + 5$

الحل:

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x^2 - 12x\Delta x - 6\Delta x^2 + x + \Delta x + 5 + 6x^2 - x - 5}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-12x - 6\Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$\therefore \; f'(x) = -12x + 1$$

قواعد الاشتقاق: Derivative Rules

المشتقة الأولى للدوال الجبرية: First Derivative for Algebraic Functions

نلاحظ إنه إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_1 فإن الدالة f مستمرة عند x_1 والعكس غير صحيح.

1- إذا كانت الدالة f دالة ثابتة $f(x)=k$ حيث k مقدار ثابت فإن: $f'(x)=0$

مثلا:

$$f(x)=2^6$$
$$f'(x)=0$$

2- إذا كانت $f(x)=x^n$ حيث n عدد صحيح موجب فإن: $f'(x)=nx^{n-1}$

مثلا:

$$f(x)=x^{18}$$
$$f'(x)=18\,x^{17}$$

3- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فإن الدالة $k\,f$ تكون قابلة للاشتقاق أيضًا حيث:

$$\frac{d}{dx}k\,f=k\,\frac{d\,f}{dx}$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=9x^2$ ***فإن*** $f'(x)$

$$\frac{d}{dx}(9x^2)=9\,\frac{dx^2}{dx}$$
$$f'(x)=9(2x)=18x$$

4- إذا كانت $f\,,g$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن: الدالة $f+g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضًا

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

مثلا:

إذا كانت $f(x)=3x^5+x^7+x^2$ ، فإن: $f'(x)=15\,x^4+7\,x^6+2\,x$

5- إذا كانت $f\,,g$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن الدالة $f\pm g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضًا.

$$\frac{d}{dx}(f-g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

مثلا:

إذا كانت $f(x)=x^5-x^2$

فإن: $f'(x)=5x^4-2x$

إذا كانت $f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3\ ,..................,\ f_n$ **دوال قابلة للاشتقاق:**

فإن الدالة $f_1+f_2+f_3+...............+f_n$ التي تمثل مجموع أو فرق هذه الدوال تكون قابلة للاشتقاق منها نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left(f_1+f_2+f_3+.......+f_n\right)(x)=\frac{d}{dx}f_1(x)+\frac{d}{dx}f_2(x)+.........+\frac{d}{dx}f_n(x)$$

مثلا:

إذا كانت $g(t)=11-3t^2+6t^4$ فإن: $g'(t)=-6t+24t^3$

6- قانون الجداء (الضرب):

إذا كانت $f\ ,\ g$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=f(x).\frac{d}{dx}g(x)+g(x).\frac{d}{dx}f(x)$$

مثلا:

إذا كانت $f=(x^2-5x)\ ,\ g=(x^3-10)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=\frac{d}{dx}\left[(x^2-5x).(x^3-10)\right]$$

$$=(x^2-5x)(3x^2)+(x^3-10)(2x-5)$$

$$=3x^4-15x^3+2x^4-5x^3-20x+50$$

$$=5x^4-20x^3-20x+50$$

7- قانون القسمة:

إذا كانت $f\ ,\ g$ دالتين قابلتين للاشتقاق عند x وكان $g(x)\neq 0$ فإن الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ تكون قابلة للاشتقاق عند x وتكون:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x).\frac{d}{dx}f(x)-f(x).\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

إذا كان $f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x)-(x)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)(1)-x(1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

8- إذا كانت $y=x^{-n}$ عندما يكون n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

$$\frac{dy}{dx}=(-n)x^{-n-1}$$

مثلا: إذا كانت $f(x)=x^{-2}$ فإن:

$$x\neq 0 \quad \text{حيث} \quad f'(x)=(-2)(x^{-2-1})=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3} \quad , \quad x\neq 0$$

9- إذا كانت $y=\sqrt{f(x)}$ **فإن:** $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

مثلا: إذا كانت $y=\sqrt{2x^3+5x}$ فإن:

$$y'=\frac{1\times(6x^2+5)}{2\times\sqrt{2x^3+5x}} \rightarrow y'=\frac{6x^2+5}{2\sqrt{2x^3+5x}}$$

10- إذا كانت $y=(\ f(x)\ )^n$ **فإن:** $y'=n(\ f(x)\ )^{n-1}\times f'(x)$

مثلا: إذا كانت $y=\left(\ 2x^2+2x\ \right)^3$ فإن:

$$y'=3\left(\ 2x^2+2x\ \right)^2(4x+2)$$

11-إذا كانت $y=\sqrt[n]{f(x)}$ **فإن:** $y'=\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}\times f'(x)$

مثلا: إذا كانت $y=\sqrt[6]{x^3+2x^2+1}$ فإن:

$$y'=(x^3+2x^2+1)^{\frac{1}{6}}$$

$$y'=\frac{1}{6}(x^3+2x^2+1)^{\frac{-5}{6}}(3x^2+4x)$$

المشتقة الأولى للدالة التركيبية (قاعدة السلسلة) Chain Rule Functions

لقد سبق أن درسنا الدالة التركيبية، وسنحاول الحصول على قانون لإيجاد المشتقة الأولى للدالة التركيبية:

إذا كانت $f\,,\,g$ دالتين قابلتين للاشتقاق وكان $u=g(x)$ فإن الدالة التركيبية هي:

$$y=(f o g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(u)$$

تكون قابلة للاشتقاق كالتالي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\big(f o g\big)(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x)=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

مثال:

إذا كانت $y=\dfrac{1}{(x^3+1)^5}$

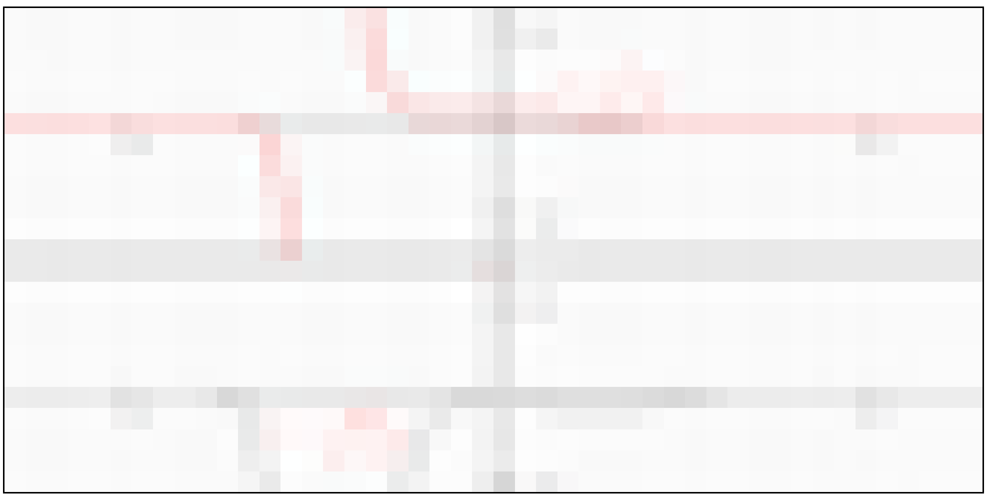
فاوجد $\dfrac{dy}{dx}$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

نفرض أن $u=x^3+1$, $y=\dfrac{1}{u^5}$ منها يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^5}\right).\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-5}{u^6}.3x^2=\frac{-15x^2}{(x^3+1)^6}$$



مثال:

إذا كانت $v = x^4 + 3x^2 \quad , \quad y = v^5 - 6$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5v^4 . (4x^3 + 6x) = 5\,(x^4 + 3x^2)^4\,(4x^3 + 6x)$$

مثال :

بفرض أن $u = \ln x \quad , \quad y = \sin u^2$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$.

الحل:

نعلم بأن: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} . \dfrac{du}{dx}$ بذلك يكون لدينا $y' = 2uu' \cos u^2$

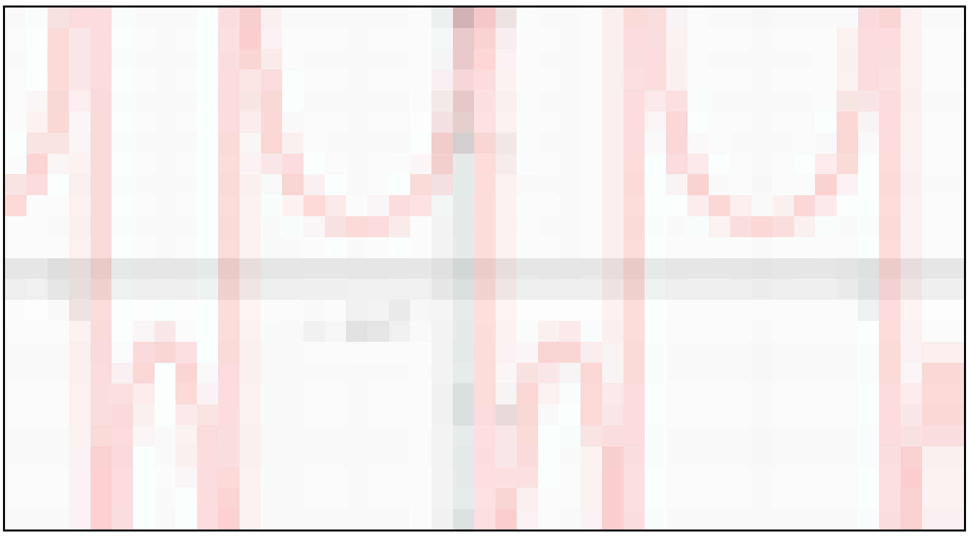
بما أن $u' = \dfrac{1}{x}$ منها يكون لدينا $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 \ln x}{x} \cos(\ln x)^2$

مثال :

بفرض أن $u = e^{\sin x} \, , \; y = \tan u$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ مع رسم الدالة التركيبية.

الحل:

نعلم بأن: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} . \dfrac{du}{dx}$ واضح أن $u' = \cos x e^{\sin x}$ منها يكون لدينا $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2\left(e^{\sin x}\right) \cos x e^{\sin x}$



المشتقة الأولى لدوال القوى: First Derivative for Power functions

1- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن المشتقة الأولى للدالة $y = x^{\frac{1}{n}}$ هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$ حيث $x \neq 0$

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث أن n, m أعداد صحيحة ؛فإن المشتقة هي:

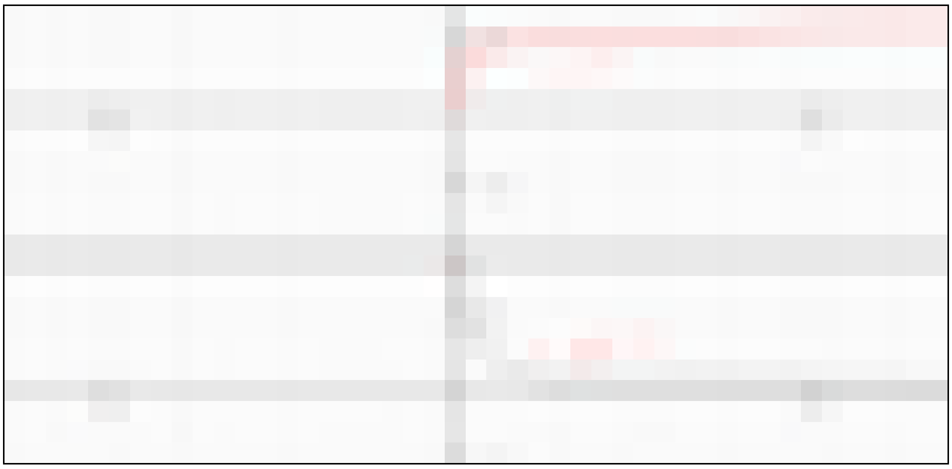
$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$ حيث $x \neq 0$

مثال:

إذا كان $y = x^{\frac{1}{12}}$ ، فأوجد y'.

الحل:

$$y' = \frac{1}{12} x^{\frac{1}{12}-1} = \frac{1}{12} x^{\frac{-11}{12}} = \frac{1}{12\, x^{\frac{11}{12}}}$$



مثال:

إذا كانت $y = x^{\frac{5}{6}}$ ، فأوجد y'.

الحل:

$$y' = \frac{5}{6} x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6} x^{\frac{-1}{6}} = \frac{5}{6\, x^{\frac{1}{6}}}$$

The Derivative of the Trig functions :اشتقاق الدوال المثلثية

1- إذا كانت $f(x)=\sin x$ فإن: $f'(x)=\cos x$:

الإثبات:

$$f(x)=\sin x$$

$$\because\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

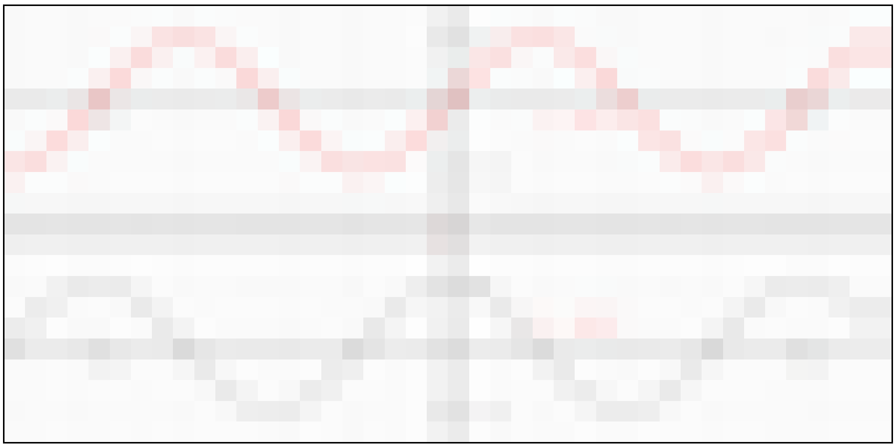
$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos(h)+\cos x\sin(h)-\sin x}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos(h)-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{(\cos(h)-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

$$f'(x)=\sin x.(0)+\cos x.(1)=\cos x$$



2- إذا كانت $f(x)=\cos x$ فإن: $f'(x)=-\sin x$

3- إذا كانت $f(x)=\tan x$ فإن: $f'(x)=\sec^2 x$

الإثبات:

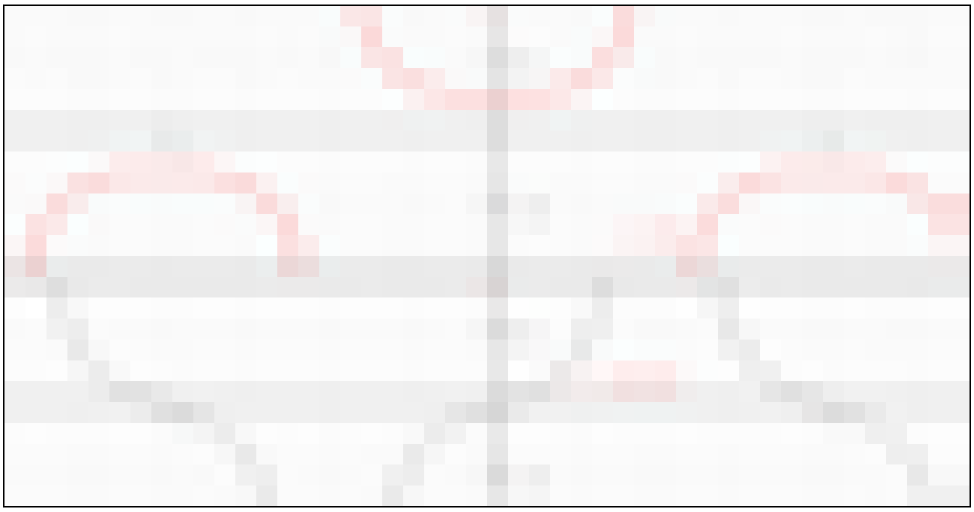
$$f(x)=\tan x\ \rightarrow\ \therefore\ f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore\ f'(x)=\sec^2 x$$

4- إذا كانت $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \tan x$



5- إذا كانت $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\cot x \csc x$

الإثبات:

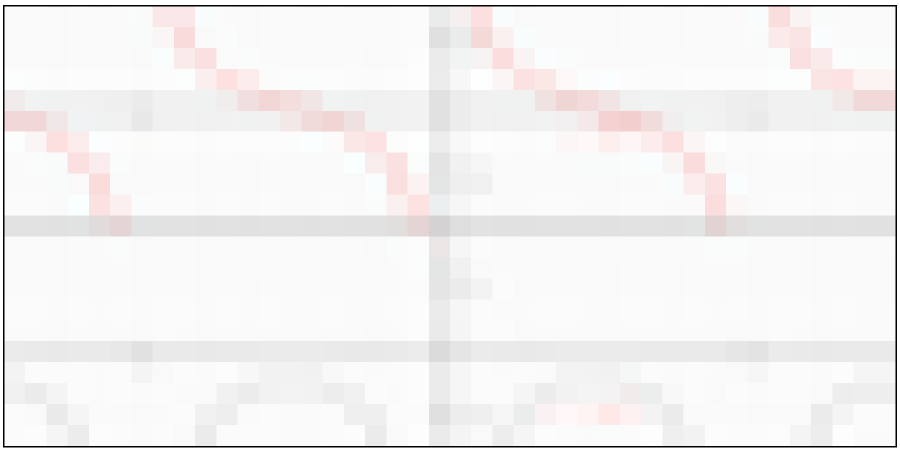
$$f(x) = \csc x \quad \rightarrow \quad \therefore \quad f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\sin x.(0) - (1).(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x -}{\sin^2 x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin x} . \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = -\cot x . \csc x$$

6- إذا كانت $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$



اشتقاق الدوال المثلثية العكسية:The derivative of the inverse Trig functions

– لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1] \quad , \quad x\to\sin x$$

دالة مستمرة ومتزايدة وتحقق $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية هي $\sin^{-1}$ بذلك تكون: $\sin^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

لحساب مشتقة الدالة $y=\sin^{-1}x$ نعلم أن:

$$y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1=\cos y y' \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

منها

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

– لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\cos:[0,\pi]\to[-1,1] \quad , \quad x\to\cos x$$

دالة مستمرة ومتناقصة وتحقق $\cos(0)=1$ و $\cos(\pi)=-1$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية هي $\cos^{-1}$ بذلك تكون: $\cos^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$.

لحساب مشتقة الدالة $y=\cos^{-1}x$ نعلم أن:

$$y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\cos y$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1=-\sin y y' \Rightarrow y'=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{\sin^2 y}}$$

منها نحصل على:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

– لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\tan:[0,\pi]\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad x\to\tan x$$

دالة مستمرة ومتزايد وتحقق $\lim_{x\to +\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية هي $\tan^{-1}$ بذلك تكون: $\tan^{-1} : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

لحساب مشتقة الدالة $y = \tan^{-1} x$ نعلم أن: $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = \sec^2 yy' \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\left(\sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin y}{\cos^2 y}\right)$$

وبالتالي يكون لدينا:
$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

مثال:

اثبت انه إذا كان $y = \cot^{-1} x$ ، فإن $y' = \frac{-1}{1+x^2}$.

الحل:

بما أن $y = \cot^{-1} x$ فإن $x = \cot x$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = -\cos ec^2 yy' \Rightarrow y' = \frac{1}{c\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

مثال:

اثبت انه إذا كان $y = \sec^{-1} x$ ، فإن $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

الحل:

بما أن $y = \sec^{-1} x$ فإن $x = \sec y$ وباشتقاق الطرفين نجد: $1 = \sec y \tan yy'$

وبالتالي يكون لدينا: $y' = \frac{-1}{\sec y \tan y}$

وبما أن $\left(1+\tan^2 y = \sec^2 y \Rightarrow \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}\right)$

يكون لدينا $y' = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

مثال:

اثبت أنه إذا كان $y=\cos ec^{-1}x$ ، فإن $y'=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

الحل:

بما أن $y=\cos ec^{-1}x$ فإن $x=\cos ecx$

وباشتقاق الطرفين نجد: $1=-\cos ecyy'$

ويكون لدينا: $y'=\dfrac{-1}{\cos ecy\cot y}=\dfrac{1}{\cos ecy\sqrt{\cos ec^2 y-1}}=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

نتيجة:

من قاعدة السلسلة نستنتج العلاقات التالية:

1- إذا كانت $y=\sin^{-1}(u(x))$ فإن: $y'=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

2- إذا كانت $y=\cos^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

3- إذا كانت $f(x)=\tan^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

4- إذا كانت $f(x)=\cot^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\dfrac{-u(x)}{1+u(x)^2}$

5- إذا كانت $f(x)=\sec^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\dfrac{u(x)}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}$

6- إذا كانت $f(x)=\cos ec^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\dfrac{-u(x)}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}$

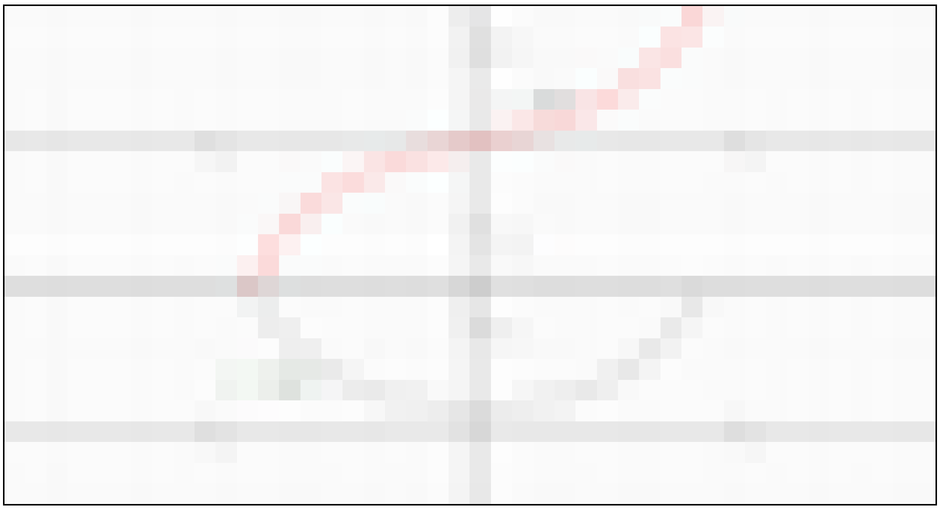
اشتقاق الدوال الزائدية: Derivative of Hyperbolic functions

من تعريف ودراسة خواص الدوال الزائدية نحصل على:

1) $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ وبالتالي فإن $(\sinh x)' = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

ومنها نحصل على: $(\sinh x)' = \cosh x$

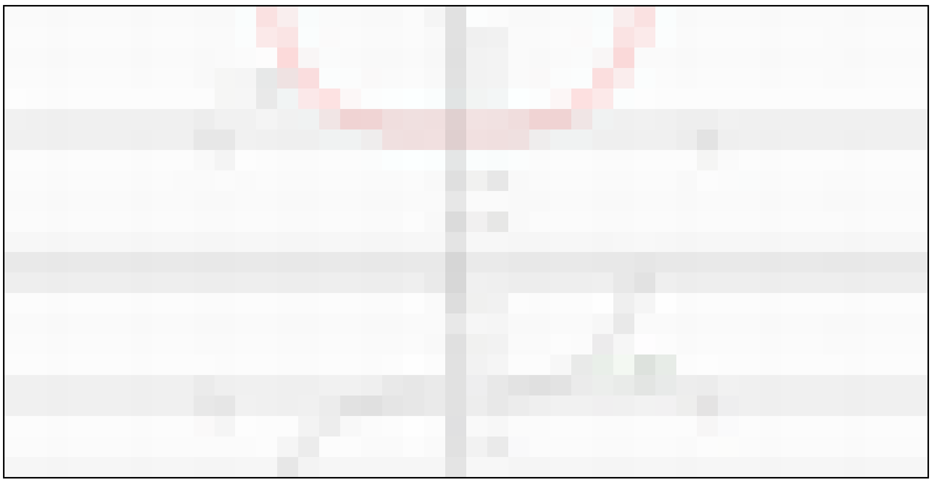
كما موضح بالشكل التالي:



2) علم بأن: $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ وبالتالي فإن $(\cosh x)' = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

منها نحصل على: $(\cosh x)' = \sinh x$

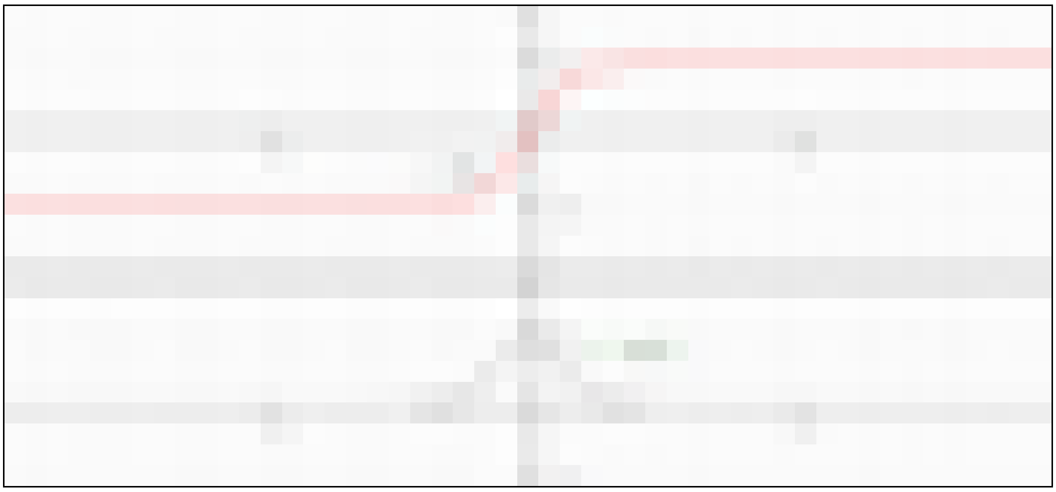
ما موضح بالشكل التالي:



3) نعلم بأن: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ وبالتالي فإن:

$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \sec h^2 x$$

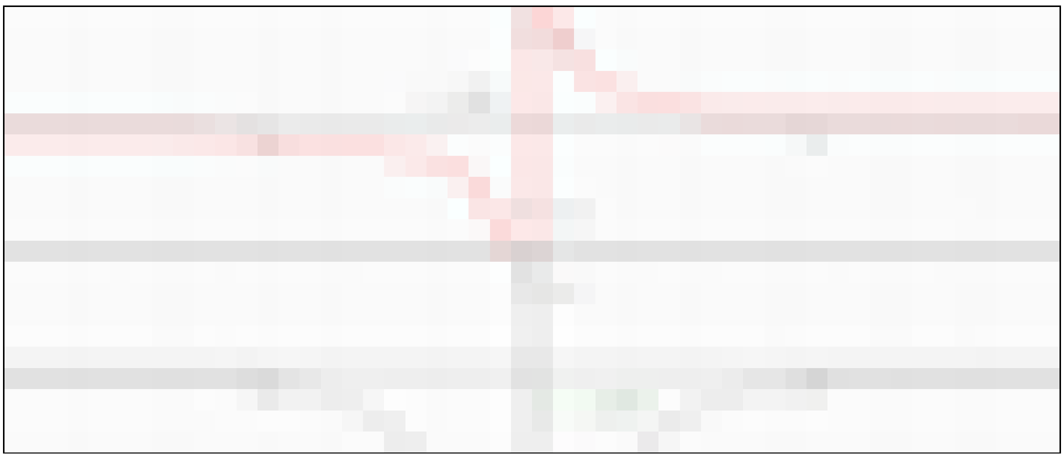
كما موضح بالشكل التالي:



4) علم بأن: $\coth x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ وبالتالي فإن:

$$(\coth x)' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x = -c\sec h^2 x$$

كما موضح بالشكل التالي:



5) $c\sec hx = \dfrac{1}{\sinh x}$ بالتالي فإن:

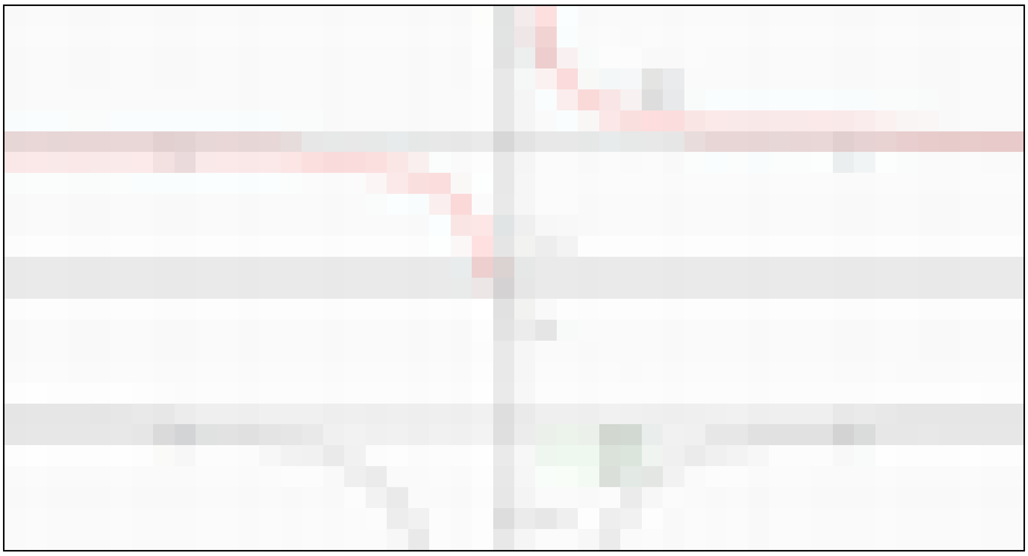
$$(c\sec hx)' = \frac{-\cosh x}{\sinh x}$$

$$= -\frac{-\cosh x}{\sinh x} \times \frac{1}{\sinh x}$$

$$= 1 - \coth^2 x$$

$$= -c\sec hx \coth x$$

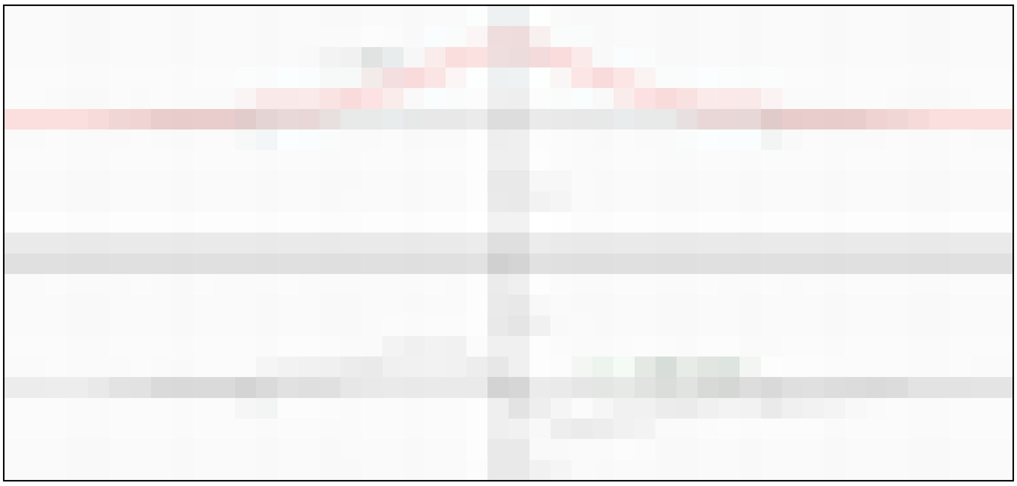
كما موضح بالشكل التالي:



6) $\sec hx = \dfrac{1}{\cosh x}$ وبالتالي فإن:

$$(\sec hx)' = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} \times \frac{1}{\cosh x} = -\sec hx \tanh x$$

كما موضح بالشكل التالي:



مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\sinh x^2+\cosh(\sqrt{x^3})$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا: $\frac{dy}{dx}=2x\cosh\ x^2+\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}\sinh(\sqrt{x^3})$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\tanh x+\cosh(\sin(e^x))$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا: $\frac{dy}{dx}=\sec h^2 x+e^x\sinh(\sin(e^x))\cos(e^x)$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\cosh(\cos x)$.

الحل:

واضح أن الدالة تركيبية بذلك يكون لدينا:

$$y'=\sinh(\cos x)(\cos x)'=\sinh(\cos x)(-\sin x)=-\sin x\sinh(\cos x)$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

الحل:

واضح أن الدالة تركيبية بذلك يكون لدينا:

$$y' = 2\cosh x \sinh x + 2\sinh x \cosh x'$$
$$= 4\sinh x \cosh x$$



مثال:

اوجد y' للدالة $y = \sinh^2 x - \cosh^2 x$ مع الرسم ؟

الحل:

واضح أن مشتقة الدالة هي :

$$y' = 2\sinh x \cosh x - 2\cosh x \sinh x'$$
$$= 0$$

طريقة ثانية للحل :

نعلم بأن : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ وبالتالي يكون لدينا:

$$y = \sinh^2 x - \cosh^2 x = -(\cosh^2 x - \sinh^2 x) = -1$$

منه تكون قيمة المشتقة هي $y' = 0$

اشتقاق الدوال الزائدية العكسية:Derivation of Inverse Hyperboli functions

من تعريف ودراسة خواص الدوال الزائدية العكسية والدوال الزائدية نستنتج العلاقات التالية:

1- مشتقة الدالة $\sinh^{-1}$:

نعلم بأن: $y=\sinh^{-1}x \Leftarrow x=\sinh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\cosh y y' \Rightarrow y'=\frac{1}{\cosh y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$$

منها $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2- مشتقة الدالة $\cosh^{-1}$:

نعلم بأن: $y=\cosh^{-1}x \Leftarrow x=\cosh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\sinh y y' \Rightarrow y'=\frac{1}{\sinh y}=\frac{1}{\sinh^2 y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}$$

و منها $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3- مشتقة الدالة $\tanh^{-1}$:

نعلم بأن: $y=\tanh^{-1}x \Leftarrow x=\tanh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\sec h^2 y y'=\left(1-\tanh^2 y\right)y'$$

منها نحصل على: $y'=\dfrac{1}{1-\tanh^2 y}=\dfrac{1}{1-x^2}$

4- مشتقة الدالة $\coth^{-1}$:

نعلم بأن: $y=\coth^{-1}x \Leftarrow x=\coth y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\left(1-\coth^2 y\right)y' \Rightarrow y'=\frac{1}{1-\coth^2 y}=\frac{1}{1-x^2}$$

منها نحصل على:

$$y'=\frac{1}{1-\tanh^2 y}=\frac{1}{1-x^2}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\sinh^{-1}\left(x^4+4x^3-4\right)e^{3x+1}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$y=\sinh^{-1}\left(x^4+4x^3-4\right)3e^{3x+1}+e^{3x+1}\frac{4x^3+12x^2}{\sqrt{1+\left(x^4+4x^3-4\right)}}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\cosh^{-1}(\sin(3x+23))\sinh\frac{1}{x}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}\cosh^{-1}\sqrt{(\sin(3x+23))}\cosh\left(\frac{1}{x}\right)+\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\frac{3\cos(3x+23)}{\sqrt{(\sin(3x+23))^2-1}}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\tanh^{-1}\left(x^3+3x+6\right)+\frac{1}{x^2}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+3}{1-\left(x^3+3x+6\right)^2}-\frac{1}{x^3}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\sec h^{-1}x$.

الحل:

باستخدام خواص الدوال المثلثية العكسية نجد أن:

$$y=\sec h^{-1}x \quad\Rightarrow\quad x=\sec hy=\frac{1}{\cosh y}$$

بذلك تكون $x=\dfrac{2}{e^{y}+e^{-y}}$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$1=\frac{-\sinh\ yy'}{\cosh^{2}y}$$

ولكن: $\sinh^{2}x=\cosh^{2}x-1$ وبالتالي يكون لدينا:

$$y'=\frac{-\cosh^{2}y}{\sinh y}=\frac{-\cosh^{2}y}{\sqrt{\cosh^{2}y-1}}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{x^{2}}}{\sqrt{\frac{1}{x^{2}}-1}}=-\frac{1}{x^{2}\sqrt{\frac{1-x^{2}}{x^{2}}}}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^{2}}}$$

مثال:

اوجد $\dfrac{dy}{dx}$ للدالة $y=u^{2}-2u+5$ إذا كان $u=\sinh x+\cos x$ مع رسم الدالة التركيبية ؟

الحل:

نوجد مشتقة الدالة u والتي تكون على الصورة :

$$u'=\cosh x+\sinh x$$

نعلم بأن: $y'=2uu'-2u'=2u'(u-1)$

بذلك تكون المشتقة على النحو التالي: $y'=(\cosh x+\sinh x)(\sinh x+\cosh x-1)$

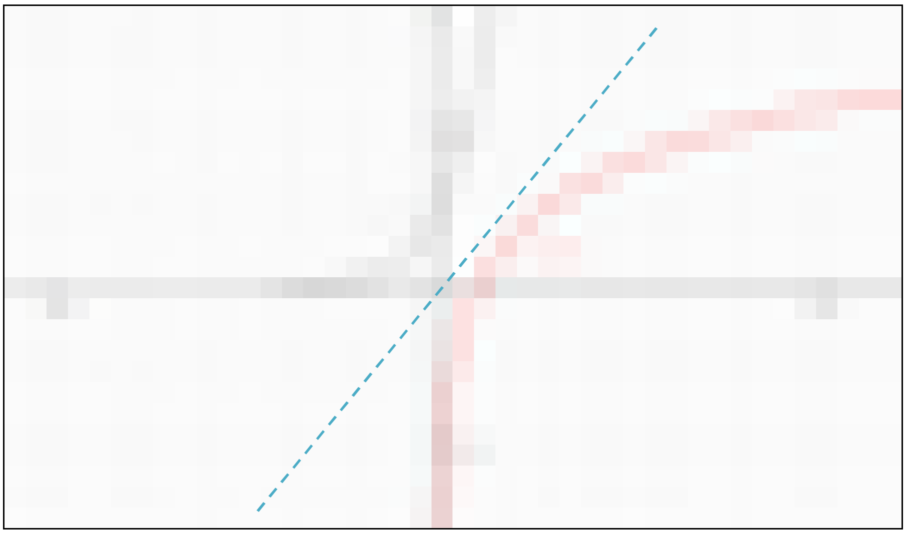


اشتقاق الدوال الأسية و اللوغاريثمية:

The Derivation of Exponential and Logarithm functions

نلخص فيما يلي بعض الخواص الأساسية للدوال الآسية و اللوغاريثمية:

– الدالة الأسية نرمز لها بالرمز exp تعرف $x \to e^x$, $\exp: IR \to IR$ وهي دالة تقبل الاشتقاق على R ومشتقاتها بشكل عام $(\exp(x))' = \exp(x)$ وإذا كانت $x = 0$ فإن $\exp(0) = e^0 = 1$ وهي دالة حقيقية والوحيدة التي تحقق هذه الخواص.



– الدالة الآسية دالة مستمرة ومتزايدة على R وبصفة عامة:

$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

– الدالة الأسية تحقق الخاصية التالية:

$e^{x+y} = e^x . e^y$ لكل $(x, y) \in R^2$.

– الدالة $x \to e^x$ مستمرة ومتزايدة على R وهي الدالة العكسية للدالة اللوغاريثمية وتعرف على الشكل التالي:

$x \to \ln x$, $\ln : R \to R$ إذا $(y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y)$ لكل $(x, y) \in R^2$.

– الدالة اللوغاريثمية قابله للاشتقاق على R ومشتقاتها بشكل عام $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ لكل $x \in R$.

– الدالة الأسية دالة مستمرة ومتزايدة على R وبصفة عامة:

$\lim_{x \to +0} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

اشتقاق الدوال الأسية: The derivation of Exponential functions

1- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

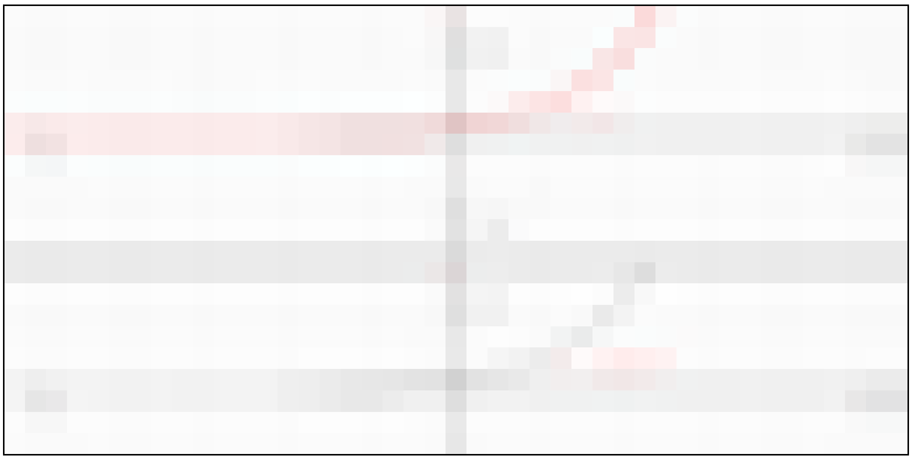
$$y = f(x) = a^x \quad ; a > 0$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى : $y' = a^x \ln a$

مثلا:

إذا كانت $y = 3^x$ فإنه كما هو موضح بالرسم:

$$y' = 3^x \ln 3$$



2- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = f(x) = ba^x \quad ; \quad a > 0$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى : $y' = ba^x \ln a$

مثلا:

إذا كانت $f(x) = 5 \times 6^x$ فإن:

$$f'(x) = 5 \times 6^x \ln 6$$

3- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = ba^{f(x)}$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x.

$$\therefore \quad y = ba^u$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d\ y}{d\ x} = ba^{u} \ln a \quad u'$$

مثال:

إذا كانت $f(x) = 8\,2^{(3x^2+4x+5)}$ فأوجد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \times \ln 2 \times (6x+4)$$

$$f'(x) = (48x+32) \times 2^{(3x^2+4x+5)} \times \ln 2$$

4- اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس $e \cong 2.718$

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة $y = be^{x}$ فإن:

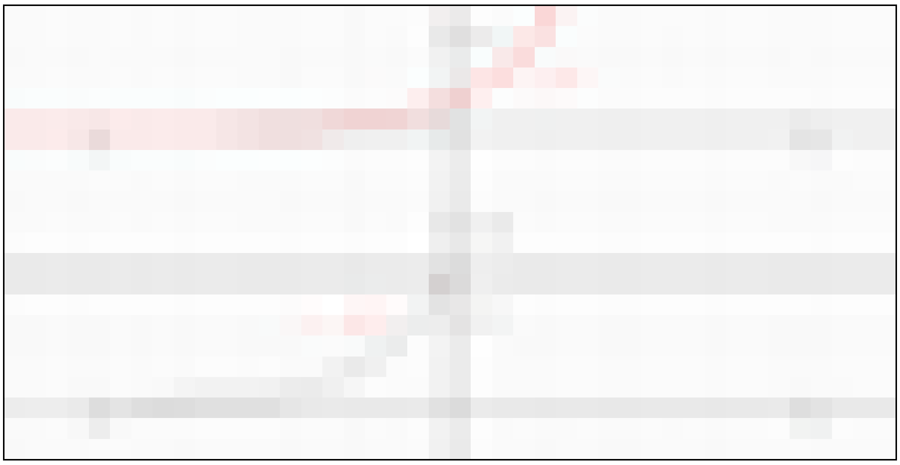
$$y' = be^{x} \ln e \frac{d}{dx}(x)$$

وحيث أن: $\ln e = 1$ عليه فإن: $y' = be^{x}$

مثلا:

إذا كانت $f(x) = 3e^{5x}$ فإن:

$$f'(x) = 15e^{5x}$$



اشتقاق الدوال اللوغارثمية: The Derivative of Logarithm functions

1- إذا كانت $f'(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = b\log_a x \quad ; \quad a > 0 \ , \ a \neq 1$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى:

$$y' = \frac{b \log_a e}{x}$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3Log_6(x)$ فإن:

$$y' = \frac{3 \log_6 e}{x}$$

2- إذا كانت $y = b\log_a f(x)$ حيث $a > 0 \ , \ a \neq 1$ فإن المشتقة الأولى تكون كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x $\quad y = bLog_a u$

ومنه فإن المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = b\,\frac{u'}{u}\, Log_a e$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3\,Log(6x^5)$ فإن:

$$y' = \frac{3(30x^4)Logx}{6x^5} = \frac{15x^4}{x^5}\,Loge = \frac{15}{x}\,Loge$$

3-إذا كانت $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = b\ln x$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هي :

$y' = \frac{b \ln e}{x}$ وحيث أن $\ln e = 1$ بذلك $y' = \frac{b}{x}$

مثلا:

إذا كانت $y = \ln v$ فإن: $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}$

مثلا:

إذا كانت $y = 2\ln x$ فإن: $y' = \frac{2}{x}$

4- إذا كانت الدالة $y = b\ln f(x)$ فإن المشتقة الأولى يتم إيجادها كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x أي أن $y = b\ln u$

وبالتالي فإن المشتقة الأولى تكون:

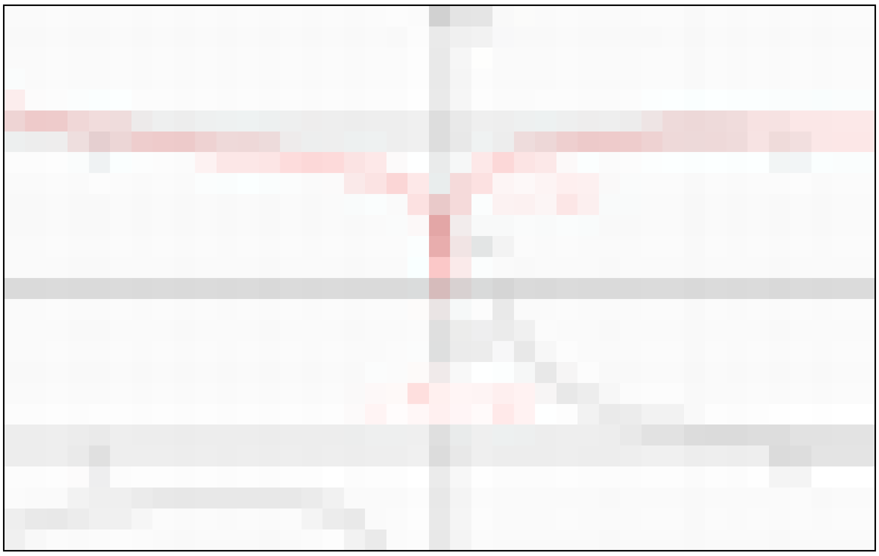
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = b\frac{u'}{u}\ln e \quad ; \quad \ln e = 1$$

$$\therefore \quad y' = \frac{dy}{dx} = b\frac{u'}{u}$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{-x}\ln x^2$

الحل: $y' = -e^{-x}\ln x^2 + e^{-x}\left(\frac{2x}{x}\right) = \left(\frac{2}{x} - \ln x^2\right)e^{-x}$



مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{-2x}\ln x \ \sin 2x$.

الحل:

تفاضل حاصل ضرب ثلاثة دوال:

$$y' = -2e^{-2x}\ln x \ \sin 2x + e^{-2x}\frac{1}{x}\sin 2x + 2e^{-2x}\ln x\cos 2x$$

التفاضل الضمني للدوال: derivative of Implicit functions

يقال عن الدالة $y=f(x)$ دالة صريحة لأنه يمكن فيها التعبير عن الدالة بواسطة المتغير x وبشكل عام وهذا هو الحال في معظم الأحيان كما في الدوال المدروسة في هذا الكتاب على سبيل المثال كل الدوال التالية صريحة:

$$y=|x+8| \ , \quad y=\sin x \ , \quad y=\sqrt{x+3} \ , \quad y=3x^3+2x^2-7x-10$$

ولكن نتداول أحياناً مع الصيغ دالية لا يمكن فيها فصل المتغير x عن الدالة y وتعطى المعادلة بالصيغة $f(x,y)=0$ وهنا تسمى الدالة ضمنية فمثلاً المعادلة: $y^2-2x^2y+\sqrt{x^2+3y^2}=2x$ يصعب فيها فصل y وحسابها بدلالة x، لإيجاد y' في دالة ضمنية نتبع الخطوات التالية:

1. بطريقة المباشرة:

أ. نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x.

ب. نحل المعادلة الناتجة لحساب y' بدلالة كلاً من x و y.

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $xy^3-3x^2=xy+5$.

الحل:

المطلوب هنا اشتقاق y بالنسبة لـــ x وهذا يعنى أن y متعلقة بـــ x يعنى وجود دالة f حيث $y=f(x)$ ولكن f غير واضحة لدينا ، لذلك علينا الاشتقاق ضمنيا فنحصل على:

$$y^3+x(3y^2y')-6x=xy'+y$$
$$3xy^2y'-xy'=y-y^3+6x$$
$$y'\left(3xy^2-x\right)=y-y^3+6x$$
$$\therefore \quad y'=\frac{y-y^3+6x}{3xy^2-x}$$

مثال:

إذا كانت المعادلة: $y^4+3y-4x^3=5x+1$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

نفاضل بالنسبة للمتغير x:

$$\frac{d}{dx}\left(y^4+3y-4x^3\right)=\frac{d}{dx}(5x+1)$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}-12x^2=5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^2+5}{4y^3+3}$$

2. تفاضل الدوال الضمنية بوساطة اللوغاريتم Logarithm differentiation

لنفرض $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل عندئذ لإيجاد المشتقة الأولى للدالة $y=[f(x)]^{g(x)}$ نتبع الخطوات التالية:

1. نأخذ ln الطرفين وعندها يكون لدينا:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$$

2. نشتق طرفي المعادلة (1) لنحصل على:

$$\frac{y'}{y}=g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)$$

3. نضرب طرفي المعادلة (2) بـــ y لنحصل على:

$$y'=y\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right]$$

4. نعوض عن y بما تساوي فنجد أن:

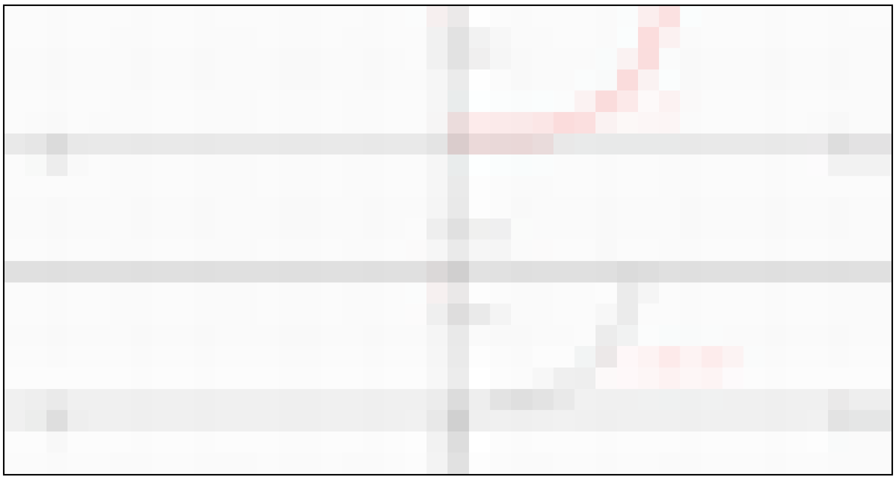
$$y'=[f(x)]^{g(x)}\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right]$$

مثال:

أوجد y' للدالة $y=x^x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ ln طرفي المعادلة $y=x^x$ نحصل على $\ln y=\ln x^x=x\ln x$ نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي $\frac{y'}{y}=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$ نضرب طرفي المعادلة بـــ y نحصل على: $y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.



مثال:

أوجد y' للدالة $y=(\sin x)^{\tan x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ ln طرفي المعادلة $y=(\sin x)^{\tan x}$ نحصل على

$$\ln y=\ln(\sin x)^{\tan x}=\tan x\ln\sin x$$

نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي

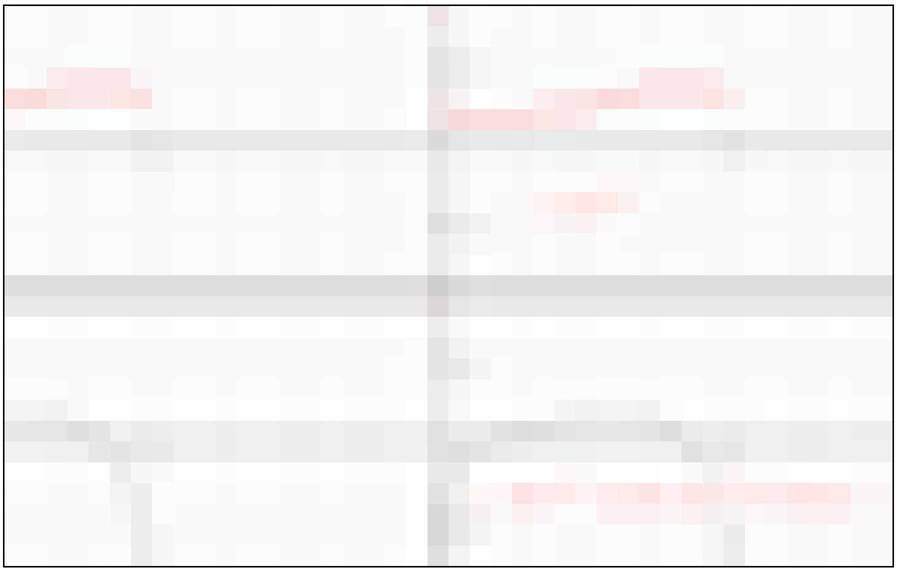
$$\frac{y'}{y}=\sec^2 x\ln\sin x+\tan x\cot x=\sec^2 x\ln\sin x+1$$

نضرب طرفي المعادلة بـــ y نحصل على:

$$y'=y(\sec^2 x\ln\sin x+\tan x\cot x=\sec^2 x\ln\sin x+1)$$

بالتعويض عن $y=(\sin x)^{\tan x}$ نحصل على:

$$y'=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\ln\sin x+\tan x\cot x=\sec^2 x\ln\sin x+1).$$



مثال:

أوجد y' للدالة $y=(x^2+1)^x$

الحل:

نأخذ ln طرفي المعادلة $y=(x^2+1)^x$ نحصل على $\ln y = x\ln(x^2+1)$ نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي

$$\frac{y'}{y} = \ln(x^2+1) + x \times \frac{2x}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}$$

نضرب طرفي المعادلة بـــ y نحصل على

$$: y = y(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1})$$

بالتعويض عن $y=(x^2+1)^x$ عن نحصل على:

$$y = (x^2+1)^x(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1})$$

مثال:

أوجد y' للدالة $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(x^2+1)^3}{(x-1)^3(x^2+4)^2}}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ لوغارثم طرفي المعادلة $y = \left(\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2} \right)^{\frac{1}{5}}$

لنحصل على $\ln y = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2} \right)$

وهذا يعنى أن:

$$\ln y = \frac{1}{5}\left(\ln(x+1)^2 + \ln(x^2+1)^3 - \ln(x-1)^3 - \ln(x^2+4)^2\right)$$

$$= \frac{2}{5}\ln(x+1) + \frac{3}{5}\ln(x^2+1) - \frac{3}{5}\ln(x-1) - \frac{2}{5}\ln(x^2+4)$$

الآن نشتق ضمنيا طرفي المعادلة لنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{5}\frac{1}{1+x} + \frac{6}{5}\frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{4}{5}\frac{x}{x^2+4}$$

نضرب طرفي المعادلة بـــ $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}}$

لنحصل على:

$$y' = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}}\left[\frac{2}{5}\frac{1}{1+x} + \frac{6}{5}\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{4}{5}\frac{x}{x^2+4}\right]$$



المشتقات من مراتب عليا High- order derivatives

لتكن $y=f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عندها يمكن حساب المشتقة y' فإذا كانت قابلة للاشتقاق يمكن حساب المشتقة الثانية y'' وهكذا نتابع لحساب مشتقات من مراتب أعلى ولنرمز لهذه المشتقات بالشكل:

$$y', y'', y''' , y^{(4)} , y^{(5)} , ..., y^{(n)}$$

وتسمى $y^{(n)}$ المشتقة من المرتبة n للدالة $f(x)$.

مثال:

أوجد y''' ، y'' ، y' للدالة $y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 5$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$

وكذلك: $y'' = 12x^2 + 12x + 2$

ثم: $y''' = 24x + 12$

منها نحصل على: $y^{(4)} = 24$

مثال:

أوجد، y'' ، y' للدالة $y = x^4 + six\,4x + \frac{1}{x} + e^{3x}$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = 4x^3 + 4\cos\ 4x - \frac{1}{x^2} + 3e^{3x}$

ثم: $y'' = 12x^2 - 16\sin\ x4x + \frac{2}{x^3} + 9e^{3x}$

مثال:

أوجد، y'' ، y' للدالة $y = \sqrt{x} + x^5 + \ln x$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4 + \frac{1}{x}$

ثم: $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 20x^3 - \frac{2}{x^3}$

مثال:

إذا كان $y=\sin(m\cos^{-1}x)$ برهن أن:

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$$

الحل:

من الواضح أن $y'=\cos(m\cos^{-1}x)\dfrac{-m}{\sqrt{1-x^2}}$ بضرب y' في $\sqrt{1-x^2}$ نحصل على $\sqrt{1-x^2}\,y'=-m\cos(m\cos^{-1}x)$ ثم نوجد y'' على الشكل التالي:

$$\sqrt{1-x^2}\,y''-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,y'=-m\left(-\sin(m\cos^{-1}x)\frac{-m}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\sqrt{1-x^2}\,y''-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,y'=-m^2\left(\frac{\sin(m\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

بالضرب في المقدار $\sqrt{1-x^2}$ نحصل على:

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$$

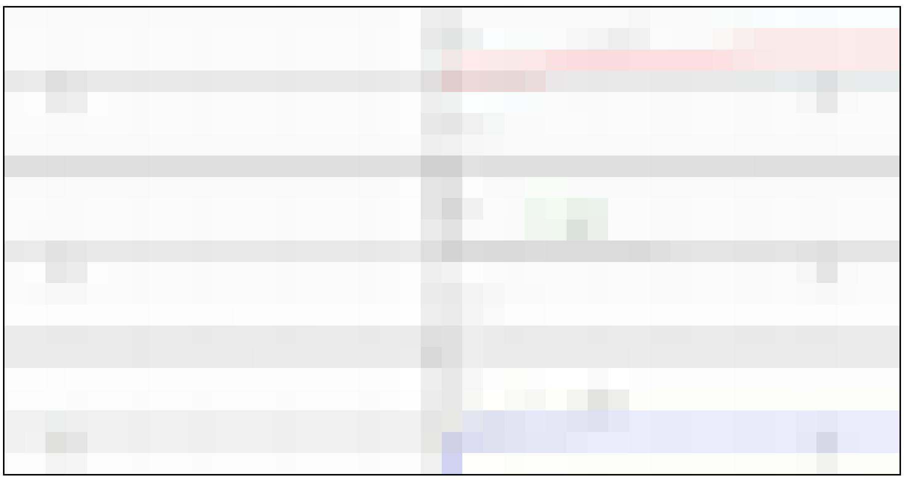
مثال:

إذا كان $y=\sqrt{x}$ أوجد y'' ، y' موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

وجد أولاً: y' على النحو التالي: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ثم نوجد: $y''=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$



✍ أمثلة محلولة

1- إذا كانت $y=\frac{x}{2}-\frac{5x^{-3}}{2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: من خواص تفاضل كثيرات الحدود نحصل على:

$$\because \quad y=\frac{x}{2}-\frac{5x^{-3}}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)(-3)\left(x^{-4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{15}{2}x^{-4}$$

2- إذا كانت $y=(4x^2-3)^2(x+5)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل كثيرات الحدود نحصل على:

$$\because \quad y=(4x^2-3)^2(x+5)$$

$$\frac{dy}{dx}=2(4x^2-3)(8x)(x+5)+(4x^2-3)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(16x)(4x^2-3)(x+5)+(4x^2-3)^2$$



3- إذا كانت $y=\frac{(2x^2-3)}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال القياسية نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}(4x)-(2x^2-3)\left(\frac{1}{3}(x^2+7)^{\frac{-2}{3}}\right)(2x)}{\left((x^2+7)^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{4x-\left(\frac{2}{3}x\right)(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

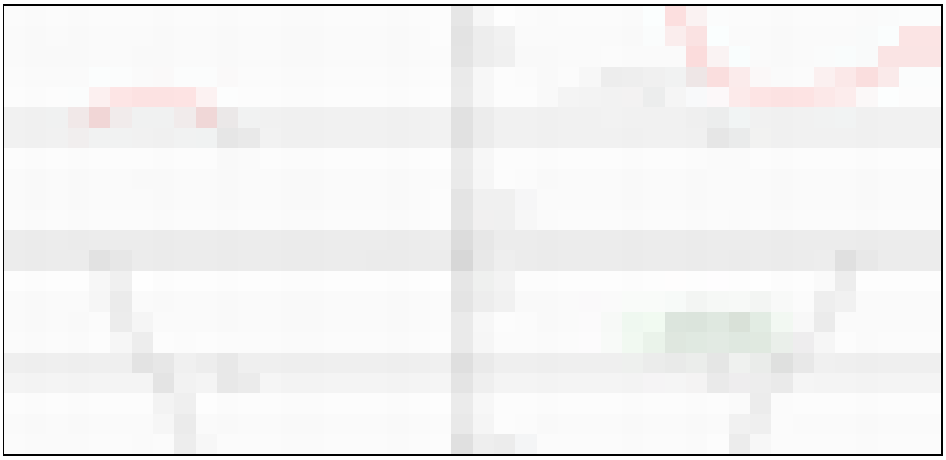
4- إذا كانت $y=\sqrt{x^{13}+13+x^{-13}}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الجذرية نحصل على:

$$\because \quad y=\sqrt[2]{x^{13}+13+x^{-13}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1)\left(y'(x)\right)}{2\sqrt{y(x)}}=\frac{(1)(13x^{12}-13x^{-14})}{2\sqrt[2]{x^{13}+13+x^{-13}}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{(13x^{12}-13x^{-14})}{2\sqrt[2]{x^{13}+13+x^{-13}}}$$



5- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y=x^3\sin^3 x^3$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الآسية و المثلثية نحصل على:

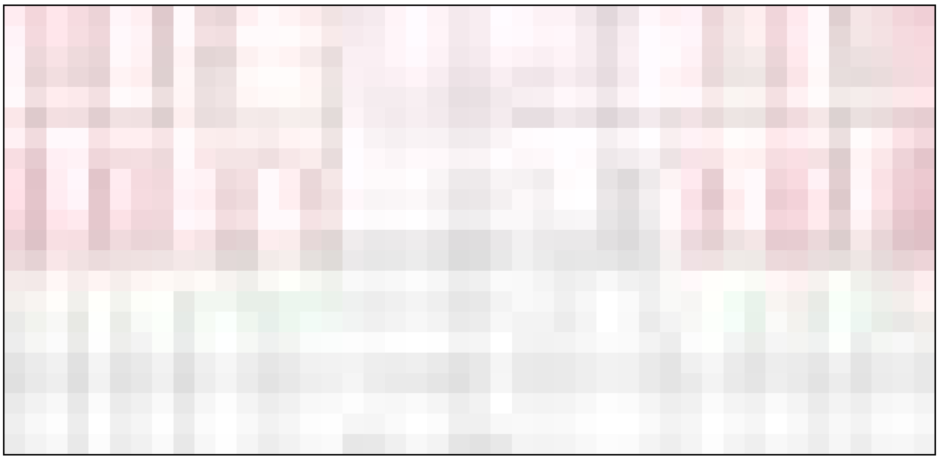
$$y'=x^3(3\sin^2 x^3.\cos x^3.3x^2)+\sin^3 x^3(3x^2)$$

$$y'=9x^5\sin^2 x^3\cos x^3+3x^2\sin^3 x^3$$

6 – أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y=\sec x^2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

نعلم أن $(\sec x)' = \tan u \sec uu'$ وبالتالي: $y' = 2x(\tan x^2 \sec x^2)$



7- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

$$y'(x) = \frac{(1+\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

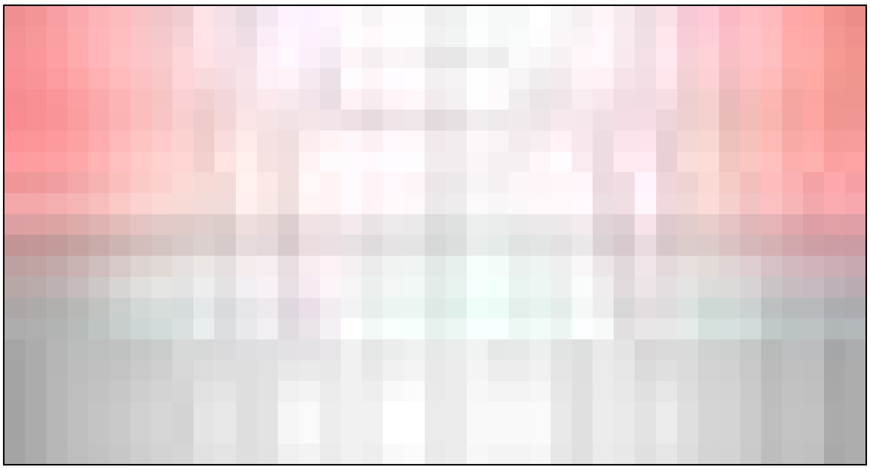
$$y'(x) = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

8- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = x^3(\sin x^3)^3$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الآسية و المثلثية نحصل على:

$$y' = x^3 3(\sin x^3)^2 \cos x^3 3x^2 + 3x^2(\sin x^3)^3$$

$$y' = 9x^5(\sin x^3)^2 \cos x^3 + 3x^2(\sin x^3)^3$$



9- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y=\sqrt{\csc x^3}$.

الحل:

$$y=\sqrt{\csc x^3} \quad \rightarrow \quad y=(\csc x^3)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad y=\csc^{\frac{1}{2}} x^3$$

$$y'=\frac{1}{2}(\csc x^3)^{\frac{-1}{2}}(3x^2)(-\cot x^3 \csc x^3)$$

$$y'=\frac{-3}{2}\csc^{\frac{1}{2}} x^3 \cot x^3 \csc x^3$$

10- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y=x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

$$y'=\tan\left(\frac{1}{x}\right)+\left(x.\frac{-1}{x^2}\sec^2\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

$$y'=\tan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

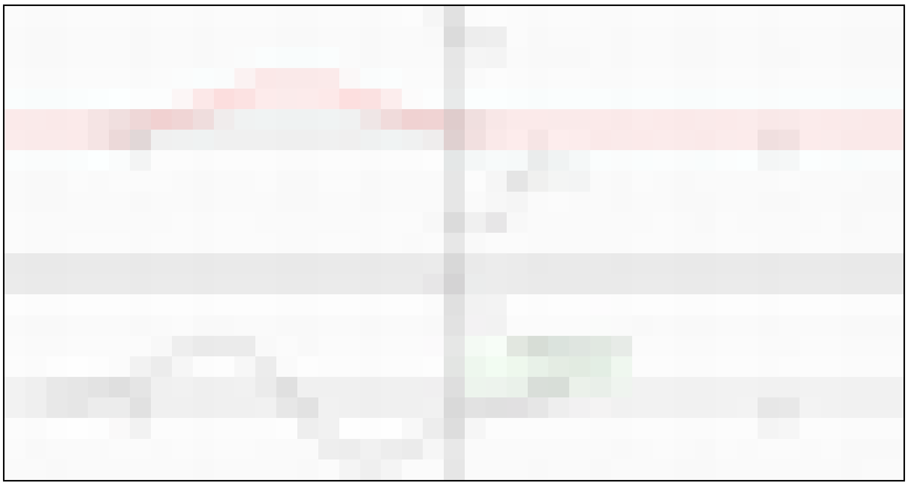
11- اوجد المشتقة الأولى إذا كانت $y=\dfrac{1}{2\times 10^{x^2+2x}}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$\because \quad y=\frac{1}{2\times 10^{x^2+2x}}$$

$$y'=\frac{-1\times(2.10^{x^2+2x}.\ln 10)(2x+2)}{(2\times 10^{x^2+2x})^2}$$

منها نحصل على: $\therefore \quad y' = \dfrac{-4\times(10^{x^2+2x}.\ln 10)(x+1)}{(2\times 10^{x^2+2x})^2} = \dfrac{-\ln 10\,(x+1)}{10^{x^2+2x}}$



12- أوجد المشتقة الأولى ، إذا كانت $y = x^2\,3^x$.

الحل:

$$y' = x^2 . \frac{d}{dx}(3^x) + 3^x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2\,3^x \ln 3 + 3^x (2x)$$
$$\therefore\ y' = x3^x \left[\, x \ln 3 + 2 \,\right]$$

13- أوجد المشتقة الأولى ، إذا كانت $y = e^{-2x}\sin 3x$.

الحل:

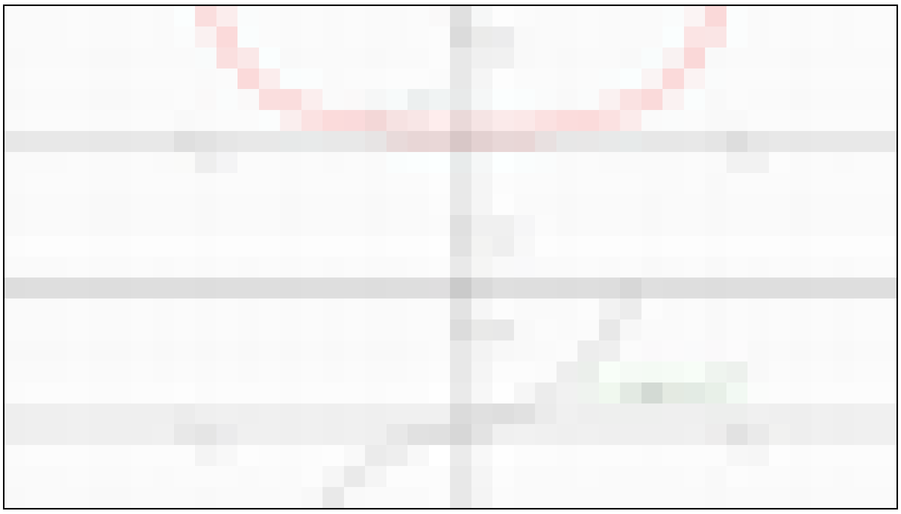
$$\because \quad y = e^{-2x}\sin 3x$$
$$y' = e^{-2x}\left(\frac{d}{dx}(\sin 3x)\right) + \sin 3x\left(\frac{d}{dx}(e^{-2x})\right)$$
$$= e^{-2x}(3\cos 3x) + \sin 3x\left(e^{-2x}(-2)\right)$$
$$= 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x$$
$$\therefore = e^{-2x}\left(3\cos 3x - 2\sin 3x\right)$$

14- أوجد المشتقة الأولى، إذا كانت $y = 5^{3x^2}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = 5^{3x^2} (\ln 5).\frac{d}{dx}(3x^2)$$

منها نحصل على: $y' = 5^{3x^2} (\ln 5)(6x)$



15- أوجد المشتقة الأولى y' ، إذا كان $y = \ln(x+3)^2$.

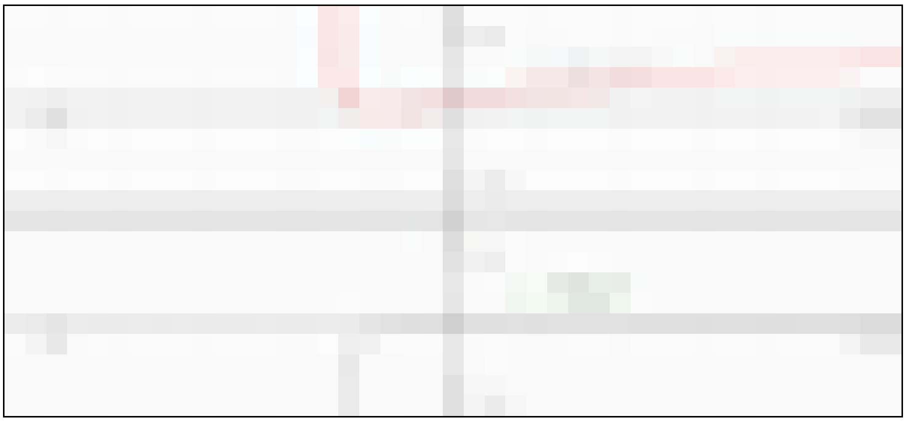
الحل:

$$\because \ y = \ln(x+3)^2$$
$$y = 2\ln(x+3)$$
$$\therefore y' = 2\left(\frac{1}{x+3}\right).\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2}{x+3}$$

16- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y = \ln^2(x+3)$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = 2\ln(x+3).\frac{d}{dx}\ln(x+3)$$
$$= 2\ln(x+3).\left(\frac{1}{x+3}\right).\frac{d}{dx}(x+3)$$
$$= \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$



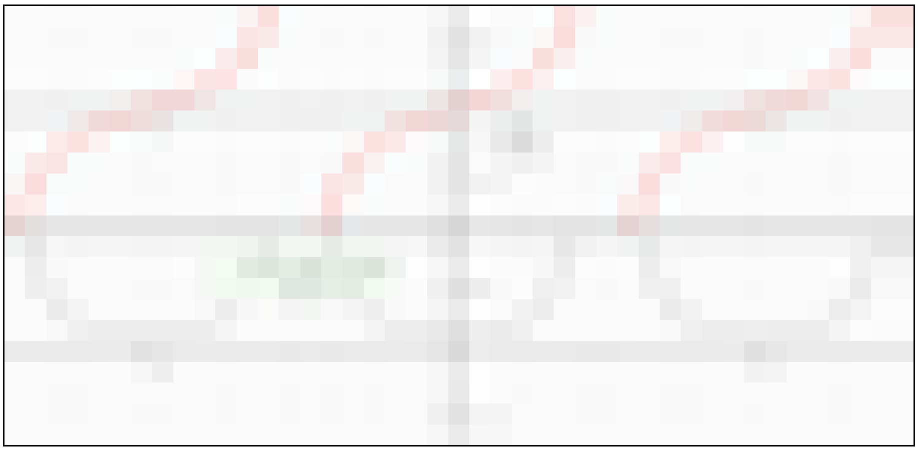
17- أوجد y' إذا كانت $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$



18- اوجد y' إذا كانت $y = (3x+1)^6 \sqrt{2x-5}$.

الحل:

$$y = (3x + 1)^6 (2x - 5)^{1/2}$$

$$y' = (3+1)^6 \cdot (\frac{1}{2})(2x-5)^{-1/2} \cdot (2) + (2x-5)^{1/2} \cdot (6)(3x+1)^5$$

$$= \frac{(3x+1)^6}{\sqrt{2x-5}} + 18 \times 3x+1) \quad \sqrt[5]{2x-5}$$

$$= \frac{(3x+1)^6 + 18(3+1)^5(2x-5)}{\sqrt{2x-5}}$$

$$= \frac{(3x+1)^5(39x-89)}{\sqrt{2x-5}}$$

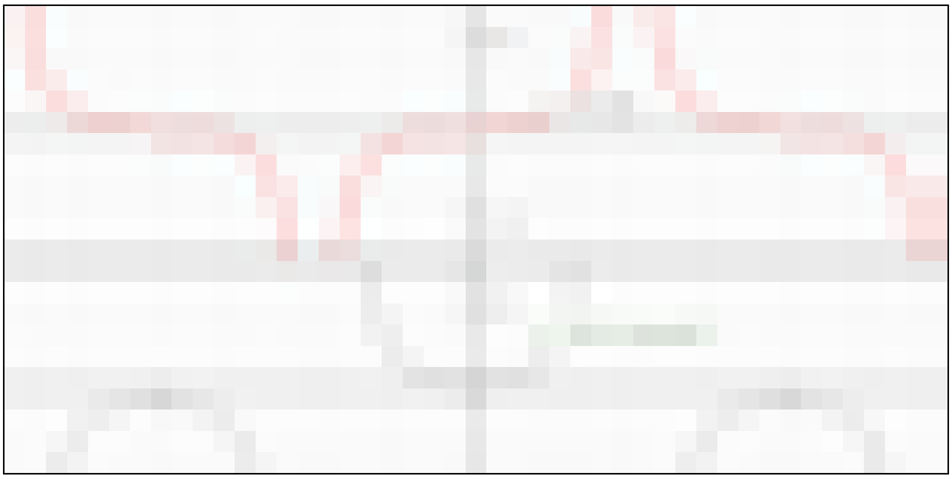
19- أوجد y' إذا كانت $y = \sec x \tan x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = \sec x \sec^2 x + \tan x \sec x \tan x$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

$$= Secx \ (\sec^2 x + \tan^2 x)$$



20- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y = \log_3(3x^2-5)$:

الحل:

$$\because \ y = \log_3(3x^2-5)$$

$$\therefore y' = \frac{1}{3x^2-5} \log_3 e \cdot \frac{d}{dx}(3x^2-5) = \frac{6x}{3x^2-5} \log_3 e$$

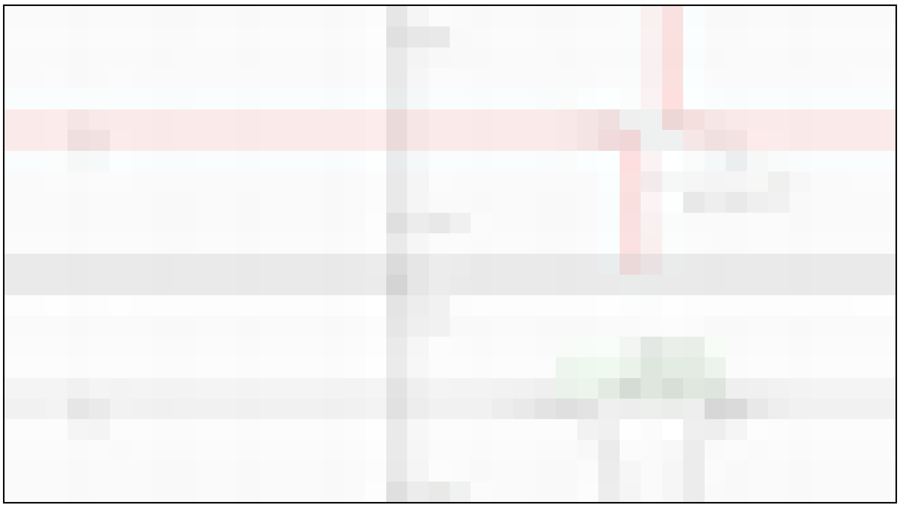
21− أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{1}{(4x^2+6x-7)^3}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y=(4x^2+6x-7)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}= \quad y' = \quad -3(4x^2+6x-7)^{-4}.(8x+6) \qquad =\frac{-6(4x+3)}{(4x^2+6x-7)^4}$$

منها
$$\frac{dy}{dx} \quad =\frac{-6(4x+3)}{(4x^2+6x-7)^4}$$



22− أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y=\log_3(\tan e^{x^2})$.

الحل:

$$\because\ y=\ln_3(\tan e^{x^2})$$

$$\therefore\ y'=\frac{1}{\tan e^{x^2}}\ .\frac{d}{dx}(\tan e^{x^2})=\frac{1}{\tan e^{x^2}}\ .\sec e^{x^2}\ \frac{d}{dx}\ \ e^{x^2}\ =\frac{2xe^{x^2}\sec e^{x^2}}{\tan e^{x^2}}$$

23− أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=(2x+5)^3\ .\ (3x-1)^4$.

الحل:

$$f'(x)=(2x+5)^3.4(3x-1)^3.(3)+(3x-1)^4.3(2x+5)^2(2)$$
$$=6(2x+5)^2(3x-1)^3[2(2x+5)+(3x-1)]$$
$$=6(2x+5)^2(3x-1)^3(7x+9)$$

24- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $f(x)=y=\sqrt[3]{5x^2-x+4}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y=(5x^2-x+4)^{1/3}$$

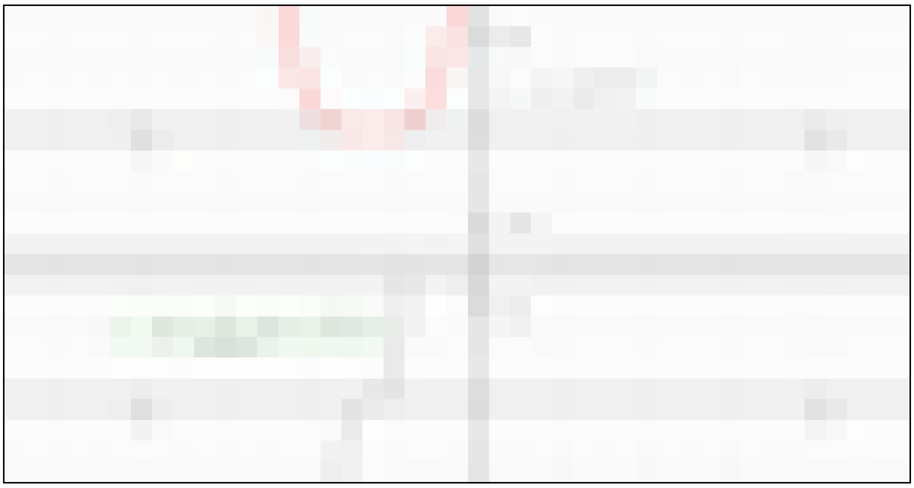
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(5x^2-x+4)^{-2/3}.(10x-1)$$ منها $$\frac{dy}{dx}=\frac{10x-1}{3\sqrt[3]{(5x2-x+4)^2}}$$



25-أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=(7x+\sqrt{2x+6})^4$.

الحل:

$$f'(x)=4(7x+\sqrt{x^2+6})^3 \ . \left(7+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+6}}\right)$$



26- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \tan^3 4x$.

الحل:

$$y' = 3(\tan\ 4x)^2\ .\ \sec^2 4x\ .\ (4)$$
$$= 3(\tan^2 4x)(4\sec^2 4x)$$
$$= 12\tan^2 4x \sec^2 4x$$

27- أوجد y' إذا كانت $y = cox(5x^3)$.

الحل:

$$y' = [-\sin(5x^3)]\ .\ 15x^2 \qquad = -15x^2 \sin(5x^3)$$



28- أوجد y' إذا كانت $y = \sqrt{\sin 6x}$.

الحل:

$$y = (\sin 6x)^{1/2}$$
$$y' = \frac{1}{2}(\sin\ 6x)^{-1/2}\ .\ \cos\ 6x.\ (6)$$
$$= \frac{3\cos\ 6x}{\sqrt{\sin\ 6x}}$$

29- أوجد y' إذا كانت $y = x^2 \sin y$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$y' = (x^2)(\cos y . y') + (\sin y).(2x)$$

$$y' = (x^2 \cos y) y' + 2x \sin y$$

$$y' - (x^2 \cos y) y' = 2x \sin y$$

$$y'(1 - x^2 \cos y) = 2x \sin y$$

$$y' = \frac{2x \sin y}{(1 - x^2 \cos y)}$$

30- أوجد y' إذا كانت $4xy^3 - x^3y + x^3 - 5x + 6 = 0$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$4x(3y^2y') + 4y^3 - (x^3y' + 3x^2y) + 3x^2 - 5 = 0$$

$$7xy^2y' + 4y^3 - x^3y' - 3x^2y + 3x^2 - 5 = 0$$

$$y'(7xy^2 - x^3) + 4y^3 - 3x^2y + 3x^2 - 5 = 0$$

$$y' = \frac{-4y^3 + 3x^2y - 3x^2 + 5}{7xy^2 - x^3}$$

31- أوجد y' إذا كانت $\sin(\cos(xy)) + x^3y = 0$.

الحل:

$$\cos(\cos(xy))(-\sin(xy)(xy' + y) + x^3y' + y3x^2 = 0$$

$$-\cos(\cos(xy)\sin(xy)(xy') + x^3y'$$

32- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $e^{xy} = x$

الحل:

$$\because \quad e^{xy} = x$$

$$(y + xy')e^{xy} = 1$$

$$ye^{xy} + xy'e^{xy} = 1$$

$$xy'e^{xy} = 1 - ye^{xy}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy}}$$

33- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y^3 e^{xy} = \tan x$.

الحل:

$$\because\ y^3 e^{xy} = \tan x$$
$$3y^2 y' e^{xy} + (y + xy')\, e^{xy} y^3 = \sec^2 x$$
$$3y^2 y e^{xy}{}' + y^4 e^{xy} + xy' y^3 e^{xy} = \sec^2 x$$
$$y'(3y^2 e^{xy} + xy^3 e^{xy}) = \sec^2 x - y^4 e^{xy}$$
$$\therefore\ y' = \frac{\sec^2 x - y^4 e^{xy}}{3y^2 e^{xy} + xy^3 e^{xy}}$$

34- إذا كانت $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ فاثبت أن $y' = 1$.

الحل:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$2x - 2y - 2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(2y - 2x) = 2y - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

35- أوجد y' إذا كانت $x^2 + y^2 = 1$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$2x + 2yy' = 0$$
$$yy' = -x$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

****

Summary

- Let $y = f(x)$ be defined on an open interval (a,b):
  Then the derivative of $f(x)$ at $x \in (a,b)$,denoted by $f'(x)$, is defined by:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Whenever the limit exists.

- The function $y = f(x)$ is differentiable at the point $x = x_0$ if the derivative of $f(x)$ exists at this point. That is , if

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{exists.}$$

- **Theorem:**
  If the function $y = f(x)$ is differentiable at the point $x = x_0$, Then this function is continuous at this point.
- **Some lows of differentiations:**
  Let C be a constant and $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable at the point x, then:

$$1: \frac{d}{dx} C = 0$$

$$2: \frac{d}{dx}(Cf(x)) = Cf'(x)$$

$$3: \frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$4: \frac{d}{dx}(f(x) \times g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$5: \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

- The first derivative of the composite function (Chain rule)
  Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions at x, If $y = f(u)$ and $u = g(x)$, then **composite function:**

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$$

Is differentiable at x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- From Chain rule , we deduce the following laws:

$$1: \frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

$$2: \frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)}.\ln a . f'(x) \quad , \quad a > 0$$

$$3: \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)}. f'(x)$$

$$4: \frac{d}{dx} Log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} Log_a e$$

$$5: \frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$6: \frac{d}{dx} \sin[f(x)] = \cos[f(x)] f'(x)$$

$$7: \frac{d}{dx} \cos[f(x)] = -\sin[f(x)] f'(x)$$

$$8: \frac{d}{dx} \tan[f(x)] = \sec^2[f(x)] f'(x)$$

$$9: \frac{d}{dx} \cot[f(x)] = -c\sec^2[f(x)] f'(x)$$

$$10: \frac{d}{dx} \sec[f(x)] = \sec\ [f(x)] \tan[f(x)] f'(x)$$

$$11: \frac{d}{dx} c\sec[f(x)] = -c\sec\ [f(x)] \cot[f(x)] f'(x)$$

The derivative of the inverse Trig functions:

$$1: \frac{d}{dx} \sin^{-1}[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$2: \frac{d}{dx} \cos^{-1}[f(x)] = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$3: \frac{d}{dx} \tan^{-1}[f(x)] = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$4: \frac{d}{dx} \cot^{-1}[f(x)] = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$5: \frac{d}{dx} \sec^{-1}[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}}$$

$$6: \frac{d}{dx} c\sec^{-1}[f(x)] = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}}$$

- If the variables x and y were given implicitly as in the equation $f(x, y) = 0$ then to find y' of the implicit function we follow these steps:

1. We differentiate both sides with respect to x .

2. We solve the resulting equation in y' and find y' as a function of x, y.

- Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions to find first derivative of $y = [f(x)]^{g(x)}$ we follow the next steps:

1. Lake logarithm both sides then:

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x).\ln f(x)$$

2. differentiale both sides:

$$\frac{y'}{y} = g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)$$

3. Multiplying by y :

$$y' = y\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)\right]$$

4. Substituting by the value of y :

$$y' = [f(x)]^{g(x)}\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)\right]$$

****

تمارين على الفصل الرابـع

1- أوجد المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام التعريف للدوال التالية:☞

$1:\ f(x) = 4x^6$

$2:\ f(x) = (x^2 + 3)(x - 6)$

$3:\ f(x) = x^3 - 4x^2 - 3$

$4:\ f(x) = (x-1)(x+2)(x-5)$

$5:\ f(x) = (x^3 + x^2)(x-1)$

$6:\ f(x) = \tan x^4 + \cos(\sin x^2) - \sec(\sqrt{x^3})$

$7:\ f(x) = (x^2 + 12)(\sqrt{x} - 1)$

$8:\ f(x) = x^{\frac{4}{7}} + 13x^{\frac{2}{3}} - 10\sin x$

$9:\ f(x) = e^{x^3} + \ln x^2 + \cos x - \tan(\sqrt{x})$

$10:\ f(x) = \sec x^4 + \cot 3x^2 - 15x$

2- أوجد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية موضحاً الإجابة بالرسم:☞

$1:\ y = x^2 \cos\sqrt{x}$

$2:\ y = \frac{x}{(x2-1)4}$

$3:\ y = \frac{x}{(x2-1)4}$

$4:\ y = \frac{x}{(x2-1)4}$

$5:\ y = (6x-7)^3\ .\ (8x^3+9)^2$

$6:\ y = x^3 \sin x$

$7:\ y = 2x\cot x + x^2 \tan x$

$8:\ y = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

$9:\ y = 10\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

$10:\ y = \frac{4}{(9x^2+16)^{2/3}}$

3- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كانت:☞

$1:\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 100$

$2:\ 8x^2 + y^2 = 10$

$3: y^2 = x\cos y$

$4: 2x^2 + \sin(xy) - \tan\sqrt{x} = xy$

$5: \cos y\sqrt{x} + \cot x^2 \sqrt{y} = \sec(x^2 y)$

$6: \cot(yx^2) + \dfrac{y^2}{\sin(xy)} = cse(x)$

$7: e^{\sin(x)} + \ln(xy) = \sqrt{(xy)}$

$8: \cot(\dfrac{x\sqrt{y}}{y}) + e^{x^4} = \ln(\sin(xy))$

$9: 18x^2y + y^2e^{xy} = \cos(\dfrac{1}{\sqrt{xy}})$

$10: (x^3 - y\sqrt{x})(\sqrt{yx} - cse(x)) = \cot(x)$

4- إذا كانت $y = e^x \sin x$ برهن أن:☞

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

5- أوجد المشتقة الرابعة لكل من الدوال التالية:☞

$1: y = x^5 - 3x^3 + 5x^2 + 1$

$2: y = e^{x^2+1}$

$3: y = \sin 3x$

6- أوجد مشقة الدوال التالية إلي الدرجة n ثم حدد درجة كل مشتقة فيها:☞

$1: y = 5x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

$2: y = x^3 e^{x^2+1}$

$3: y = x^2 - 5x + 9$

****

تطبيقات على المشتقات Application of the Derivatives

نقدم في هذا الفصل بعض التطبيقات الهامة على المشتقات والتي لها دور فاعل في إيجاد حلول لكثير من المسائل التطبيقية ومنها:

معادلة المماس والعمودي على المماس (الناظم) لمنحنى:

Equation of The Tangent and Normal Lines to a curve

نعلم أن معادلة الخط المستقيم ذي ميل m والمار بالنقطة (x_0, y_0) تعطي كما يلي:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

وبما أن ميل المستقيم عند النقطة $(x_\circ, y_\circ)$ هو

$$m = f'(x_\circ)$$

فإن معادلة المستقيم تكون على الشكل:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

أو

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

وبما أن حاصل ضرب ميلي مستقيمين متعامدين يساوي (-1) (بشرط أن أيّا من المستقيمين لا يوازي المحور الرأسي) أي أن:

$$m_1 \times m_2 = -1$$

لذلك فإن:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \text{أو} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

بشرط أن: $(m_2 \neq 0 \ , \ m_1 \neq 0)$

وبما أن المعادلة العامة للخط المستقيم هي:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

فإن ميل العمودي على المماس يساوي مقلوب ميل المماس بإشارة مخالفة:

$$m_{\text{عمودي}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad , \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

بالتالي فإن معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{أو} \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

مثال:

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند $x = 2$ لمنحنى الدالة f حيث: $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

أولاً: يجب تعيين النقطة (x_0, y_0) ويتم ذلك بإيجاد y_0:

$$y_0 = f(x_0) = 2x_0^3 - 5x_0 + 2$$

$$y_0 = 2(2)^3 - 5(2) + 2 = 8$$

$$\therefore \quad (x_0, y_0) = (2, 8)$$

إذا:

$$f'(x) = 6x^2 - 5$$

ميل المماس عند $x = 2$ هو: $m = 6(2)^2 - 5 = 19$

بالتالي فإن معادلة المماس تكون على الصورة:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 8 = 19(x - 2) \quad \text{أو} \quad 19x - y - 30 = 0$$

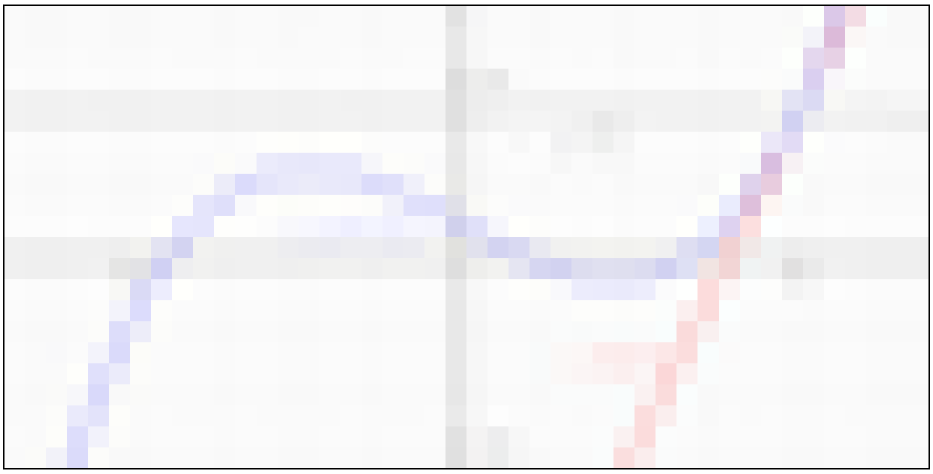
ومنها $y = 19x - 30$

بما أن ميل العمودي على المماس = $\frac{-1}{19}$

إذا معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - 8 = \frac{-1}{19}(x - 2) \quad \text{أو} \quad x + 19y - 154 = 0 \,.$$

منها نحصل على $y = \frac{-x}{19} + \frac{154}{19}$



مثال:

اكتب معادلتي المماس والعمودي على المماس للمنحني $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3,4)$.

الحل:

لإيجاد معادلة المماس نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x فيكون لدينا

$$2x + 2yy' = 0$$

$$\therefore 2yy' = -2x \quad \rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$ ومنها $$m = \frac{-3}{4}$$

$\because$ معادلة المماس هي: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\therefore\ y - 4 = \frac{-3}{4}(x - 3)$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{9}{4} + 4$$

$$\frac{3}{4}x + y - \frac{25}{4} = 0$$

$$3x + 4y - 25 = 0$$

$\because$ ميل (الناظم) العمودي على المماس:

$$m_1 = \frac{-1}{m} \quad = \frac{-1}{\frac{-3}{4}} = \frac{4}{3}$$

∵ معادلة العمودي على المماس هي: $y - y_0 = m_1(x - x_0)$

∴ معادلة العمودي هي:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x - 4 + 4$$

$$\frac{4}{3}x - y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$$

مثال:

اكتب معادلة (الناظم) العمودي على المماس للمنحنى $y = 2 + x^2$ عند النقطة $(-1,3)$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

لتكن m ميل المماس و m_1 ميل العمودي عليه عندئذ نحسب m من المشتقة y'.

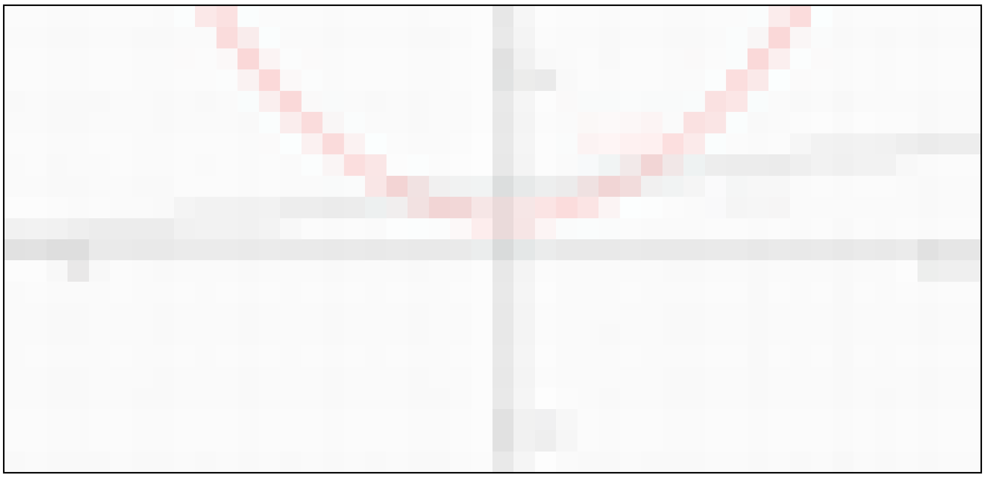
بما أن: $y' = 2x$ منها $m = -2$

فإن ميل العمودي عليه: $m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

∴ معادلة العمودي على المماس هي:

$y - 3 = \frac{1}{2}[x - (-1)]$ ومنها $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3$ ومنها $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ كما في الشكل التالي:



مثال:

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحني $y = \dfrac{x^3}{4 - x}$ عند النقطة $(2,4)$.

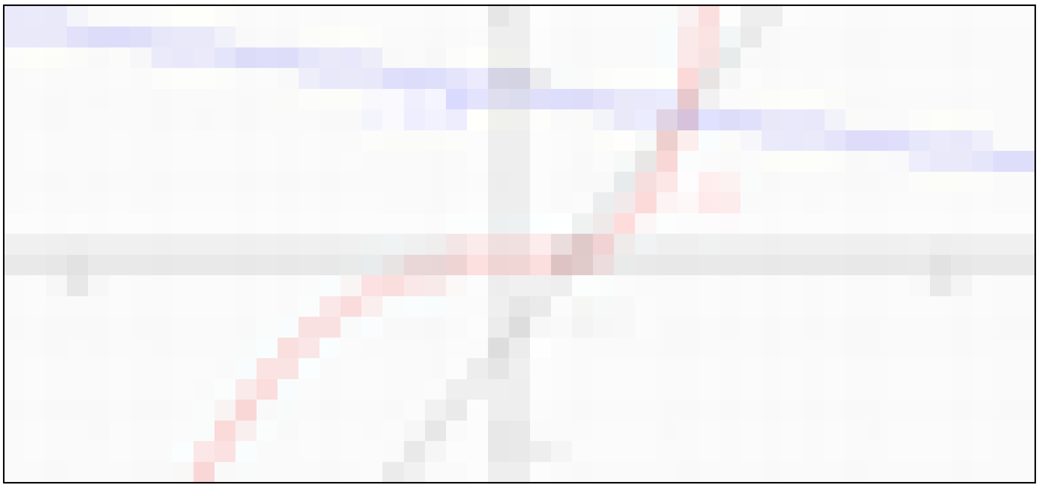
الحل:

نحسب المشتقة: $y' = \dfrac{3x^2(4-x) + x^3}{(4-x)^2}$ منها نوجد ميل المنحنى:

$m = \dfrac{12(4) - 2(8)}{2^3} = \dfrac{32}{8} = 3$ بذلك تكون معادلة المماس هي:

$y - 4 = 3(x - 2)$ ومنها $y = 3x - 2$

ومعادلة العمودي هي $y - 4 = -\dfrac{1}{3}(x - 2)$ ومنها: $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{14}{3}$ كما في الشكل التالي:



نظرية رول Rolles Theorem .

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) و مستمرة (متصلة)على $[a,b]$ وإذا كان $f(a)=f(b)=0$ فإن هناك عنصر واحد على الأقل c في (a,b) حيث:

$f'(c)=0$.

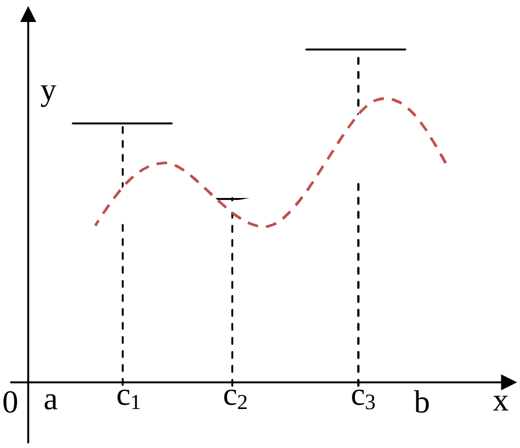
البرهان:

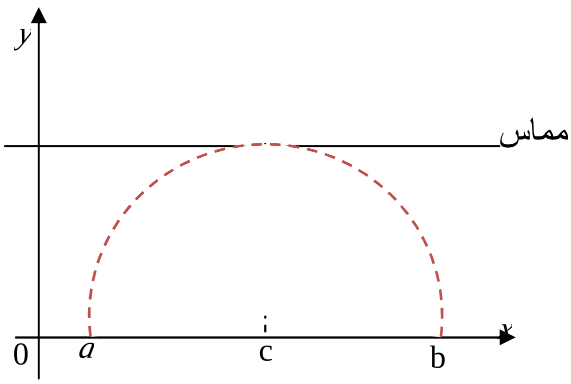
أولاً: إذا كان $f(x)=f(a)=f(b)$ لكل $x\in(a,b)$

فإن الدالة f تكون دالة ثابتة وبالتالي فإن $f'(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$

ثانياً: إذا كان هناك $x\in(a,b)$ حيث أن $f(x)\neq f(a)$ فإن: $f(x)>f(a)$ أو $f(x)<f(a)$ ، لنأخذ الحالة:

$f(x)>f(a)$ (1)





هناك عدد c في (a,b) يحقق ما يلي $f(x)\le f(c)$ لكل x في (a,b) لأن الدالة متصلة ولهذا تكون لها قيمة عظمى.

إذا $f(x)-f(c)\le 0$ إذا كان c على يمين العدد x فإن $x-c<0$

وبذلك فإن:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

ومن ذلك:

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0 \qquad ....(1)$$

وإذا كان c على يسار العدد x فإن $x-c>0$ وبذلك:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$$

ومن ذلك:

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0 \qquad ....(2)$$

من (1)، (2) نستنتج أن: $f'(c)=0$.

من النظرية نجد أنه إذا كانت الدالة f مستمرة على فترة مغلقة وقابلة للاشتقاق على تلك الفترة المفتوحة وقيمة الدالة عند بداية الفترة تساوي قيمة الدالة عند نهاية الفترة وتساوي الصفر، فإنه يوجد على الأقل عنصر واحد c بين a,b ويكون المماس عند النقطة $(c, f(c))$ موازياً لمحور السينات و قد يكون هناك أكثر من c بين a,b تكون عنده المشتقة الأولى صفراً.

مثال:

أوجد العدد c في الفترة (0,3) الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x)=2x^2-6x$

الحل:

حيث أن $f(0)=f(3)=0$ والدالة مستمرة على الفترة $[0,3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,3)$ فإنه:

$$f'(x)=4x-6$$

$$f'(\text{c})=4c-6=0$$

$$\therefore\ 4c-6=0$$

$\therefore\ c=\dfrac{3}{2}$ يحقق نظرية رول لهذه الدالة.

مثال:

أوجد العدد c في الفترة (0,1) الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x)=\sqrt{x}(x^3-1)$

الحل:

بما أن $f(0)=f(1)=0$ والدالة مستمرة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$ فإنه:

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x}+\frac{(x^3-1)}{2\sqrt{x}}$$

نضع العدد c نحصل على: $f'(c) = 3c^2\sqrt{c} + \frac{(c^3-1)}{2\sqrt{c}} = 0$

$$3c^2\sqrt{c} + \frac{(c^3-1)}{2\sqrt{c}} = 0$$

$$6c^3 + c^3 - 1 = 0$$

$$c^3 = \frac{1}{7} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

من الواضح أن: $c = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ يحقق نظرية رول لهذه الدالة.

مثال :

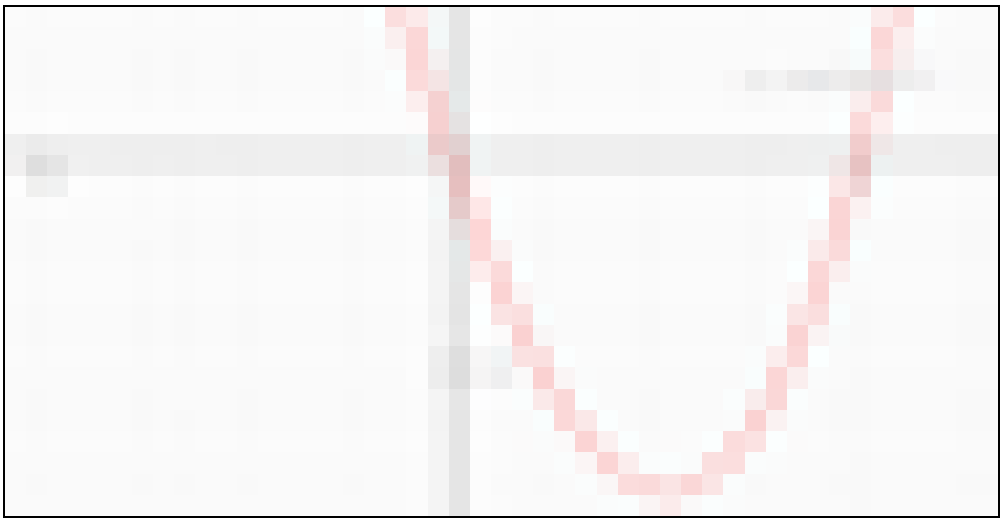
برهن على وجود قيمتان للعدد c فـي الفتـرة $(0,2)$ الـذي يحقـق نظريـة رول للدالـة $f(x) = x(x-2)(x+7)$ مع رسم الدالة ؟

الحل:

بما أن $f(0) = f(2) = 0$ والدالة كثيرة الحدود مستمرة على الفترة $[0,2]$ وقابلة للاشتقاق عليها فإن: $f'(x) = (x-2)(x+7) + x(x+7) + x(x-2)$ بوضع c بدلا من x نحصل على: $f'(c) = (c-2)(c+7) + c(c+7) + c(c-2)$

وبمساواتها بصفر نحصل على :

$c^2 + 5c - 14 + c^2 + 7c + c^2 - 2c = 0$ منها يكون لدينا $3c^2 + 10c - 14 = 0$ وبالتالي يكون هناك قيمتان للعدد c تحققان النظرية .



نظرية القيمة الوسطى Mean Value Theorem:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) و مستمرة (متصلة) على $[a,b]$ فإن هناك عنصر واحد على الأقل c في (a,b) يحقق:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان:

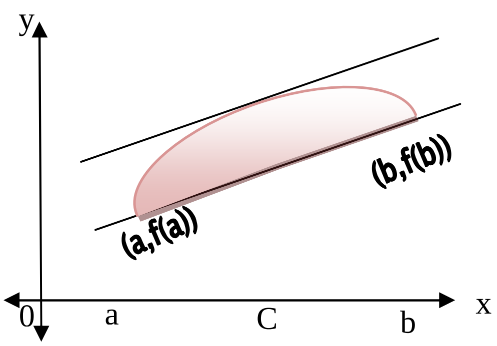
نعرف الدالة $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

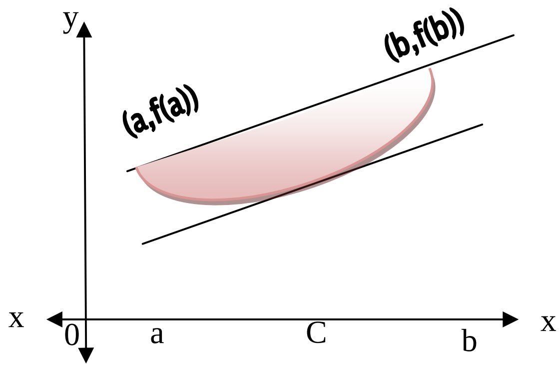
نلاحظ أن g تحقق شروط نظرية رول كما أن: $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

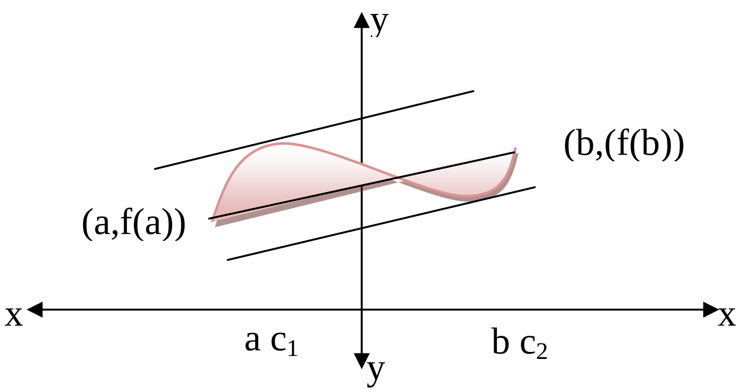
إذا هناك $c \in (a,b)$ وحيث أن: $g'(x) = 0$ ومنها $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ومن ذلك نجد أن: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

توضح هذه النظرية بأنه ليس من الضروري أن يكون $f(a)=f(b)$ لوجود عدد c بين a , b يكون المماس عند النقطة $(c, f(c))$ موازياً للخط الواصل بين النقطتين $(a, f(a)),(b, f(b))$







مثال:

إذا كان $f(x)=\frac{1}{3}(x^3+2x)$ فاوجد العدد c في الفترة $[0,3]$ الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى.

الحل:

حيث أن الدالة $f(x)=\frac{1}{3}(x^3+2x)$ متصلة (كثيرة الحدود) وقابلة للاشتقاق:

$$f'(x)=x^2+\frac{2}{3}$$

فإنه يوجد عدد c بين (0 , 3) بحيث: $f'(c)=\dfrac{f(11)-f(0)}{3-0}$

$$c^2+2=\frac{9-0}{3-0}=\frac{11}{3}$$

بذلك فإن $c=\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \rightarrow$ $c^2=\frac{5}{3}$ ، وحيث أن العدد $c=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ يقع خارج الفترة $(0,3)$

∴ فإن العدد c الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى هو $c=\sqrt{\frac{5}{3}}$

مثال:

وضح لماذا لا يوجد عدد c في الفترة $(-1,2)$ يحقق نظرية القيمة الوسطى للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$.

الحل:

واضح أن الدالة غير مستمرة على الفترة $[-1,2]$

لأن العدد 0 يقع داخل الفترة والدالة غير معرفة عندما $x=0$.

مثال:

باستخدام نظرية القيمة الوسطى برهن صحة ما يلي:

$$\tan^{-1}b-\tan^{-1}a<b-a \quad , \quad \forall a<b .$$

الحل:

بفرض أن $f(x)=\tan^{-1}x$ والفترة (المجال) الاختياري $[a,b]$ عندئذ وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى على هذه الدالة المستمرة والقابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ نجد:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\tan^{-1}b-\tan^{-1}a}{b-a}$$

منها $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ أي أن $f'(c)=\dfrac{1}{1+c^2}$ منها نحصل على

$$\frac{1}{1+c^2}=\frac{\tan^{-1}b-\tan^{-1}a}{b-a}$$

ولكن $0<\dfrac{1}{1+c^2}<1$ لأن المقام أكبر من البسط وكلاهما موجبان

إذاً $\dfrac{\tan^{-1}b-\tan^{-1}a}{b-a}<1$

منها نحصل على: $\tan^{-1}b-\tan^{-1}a<b-a$ وهو المطلوب.

التزايد والتناقص Increasing and decreasing:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على فترة ما ولتكن x_1 , x_2 عددين اختياريين في تلك الفترة عندئذٍ:

a. تسمى f دالة متزايدة " increasing function " على الفترة إذا كان

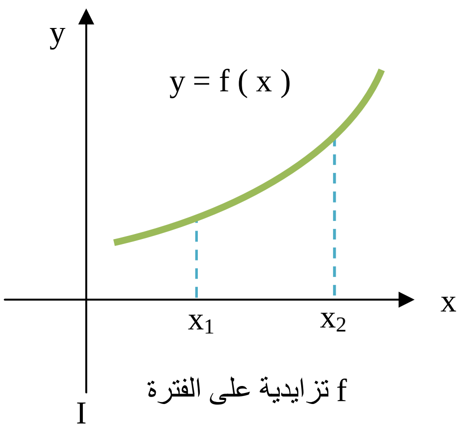
$$\forall \quad x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$$

b. تسمى f دالة متناقصة " decreasing function " على الفترة إذا كان

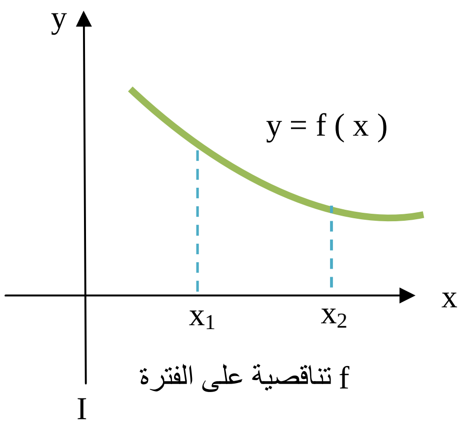
$$\forall \quad x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$$

c. تسمى f دالة ثابتة " constant function " على الفترة إذا كان

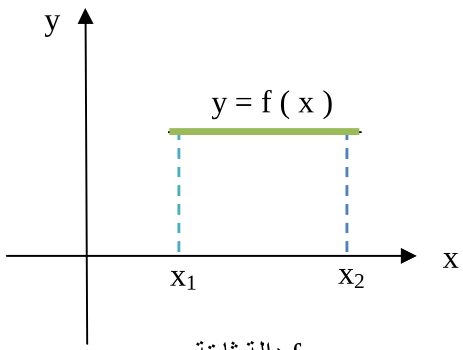
$f(x_2)=f(x_1)$ لكل $x_2 , x_1 \in I$ تنتمي إلى نفس الفترة.



f تزايدية على الفترة



f تناقصية على الفترة



f دالة ثابتة

مثال:

ابحث تزايد الدالة $f(x)=x^4$ وتناقصها على الفترتين $L_2=(0,\infty)$ $L_1=(-\infty,0)$.

الحل:

أولاً: إذا كانت $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ حيث:

$x_1<x_2$

$\because\ x_2<0\ ,\ x_1<0$

وحيث أن: $x_1<x_2$ وهذا يودي إلي $x_1^4>x_2^4$ مثلا $-2<-1$ هذا يؤدي إلي $16>1$.

$\therefore$ الدالة $f(x)$ تكون تناقصية على الفترة $(-\infty,0)$

ثانياً: إذا كانت $x_1\ ,x_2\in(0\ ,\infty)$

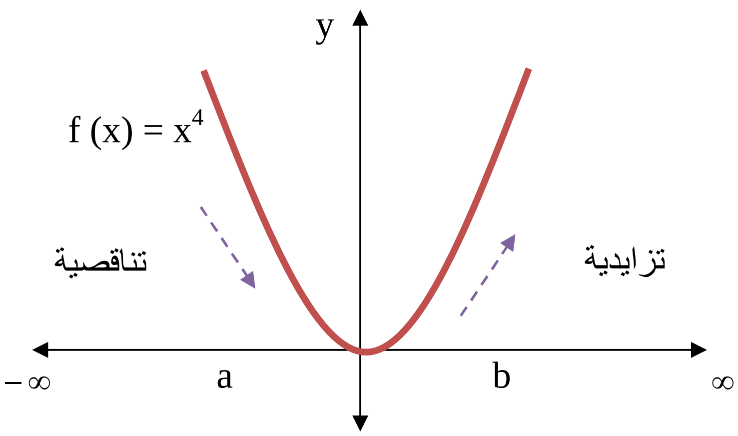
حيث أن $x_1<x_2$

$\because\ x_2>0\ ,\ x_1>0$

وحيث أن $x_1<x_2$

$x_1^4<x_2^4$

$\therefore$ الدالة $f(x)$ تكون تزايدية على الفترة $(0,+\infty)$ والشكل الآتي يبين ذلك



بالتدقيق في الشكل السابق نلاحظ أن قيمة الدالة تتناقض على الفترة $(-\infty,0)$ كلما ازدادت قيمة xفي هذه الفترة وأن قيمة الدالة تتزايد على الفترة $(0, +\infty)$ كلما ازدادت قيمة x في هذه الفترة.

ملاحظة:

علمنا فيما سبق أن:

ميل المماس في نقطة = مشتقة الدالة في تلك النقطة = ظل الزاوية θ التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

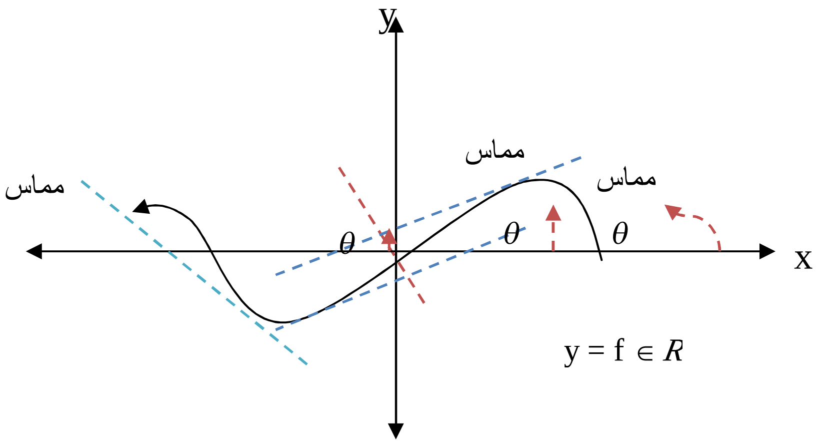
علماً بأن ميل المماس لا يساوي صفر إذا كانت: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

وأن ميل المماس > صفر إذا كانت: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

ومن بيان الدالة الموضح بالشكل التالي نجد أن:

1- الدالة $f(x)$ تكون تزايدية على الفترات التي يكون فيها المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

2- الدالة $f(x)$ تكون تناقصية على الفترات التي يكون فيها المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



مبرهنة Theorem:

لتكن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة L وقابلة للتفاضل على الفترة: $(a,b) \subseteq L$

1- إذا كانت $f'(x) > 0$ لجميع قيم $x \in (a,b)$ تكون $f(x)$ متزايدة على الفترة (a,b).

2- إذا كانت $f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \in (a,b)$ تكون $f(x)$ متناقصة على الفترة (a,b).

الإثبات:

1- لتكن x_1 , x_2 أي عددين في الفترة (a,b) بحيث يكون $x_1 < x_2$ ولتكن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة (x_1 , x_2) وقابلة للاشتقاق على الفترة (x_1 , x_2)

فمن مبرهنة القيمة المتوسطة نجد أن:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

بما أن $x_1 < x_2$ ؛ كما أن: $f'(c) > 0$ (من الفرض)

إذا $f(x_2) - f(x_1) > 0$ و بالتالي فإن: $f(x_2) > f(x_1)$

وبذلك يتبين لنا أن: $f(x_1) < f(x_2) \quad \rightarrow \quad x_1 < x_2$

إذا من التعريف السابق لتزايد وتناقص الدالة ينتج أن $f(x)$ تكون متزايدة على الفترة (a,b).

2- بطريقة مماثلة يمكن إثبات الجزء الثاني من المبرهنة.

مثال:

استخدم المبرهنة السابقة لاختبار الدالة $f(x) = -3x^2$ من حيث تزايدها وتناقصها على الفترتين المبيتين:

$$L_2 = (0, \infty) \text{ ، } L_1 = (-\infty, 0)$$

الحل:

$$f(x) = -3x^2$$

$$\therefore \ f'(x) = -6x$$

1) إذا كانت x تنتمي للفترة $L_1 = (-\infty,0)$ فإن $x < 0$ وبالتالي:

$$-6x > 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0$$

$\therefore$ الدالة تزايدية لجميع قيم $x \in L_1$

2) إذا كانت x تنتمي $L_2 = (0,\infty)$ فإن $x > 0$ وبالتالي:

$$-6x < 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0$$

$\therefore$ الدالة تناقصية لجميع قيم $x \in L_2$

إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية معطاة فقد يكون هناك عدد معلوم من الفترات التي هي جزء من نطاق الدالة $f(x)$ وتكون عليها $f'(x) > 0$ كما قد يكون هناك عدد معلوم من الفترات التي هي جزء من نطاق الدالة $f(x)$ ويكون عليها $f'(x) < 0$ ولتحديد تلك الفترات نورد التعريف التالي:

1- القيم الحرجة Critical Point

تعرف القيم الحرجة للدالة $f(x)$ التي نطاقها الفترة L بأنها القيم:

$$x = c \in L = (a, b]$$

التي تحقق إحدى الشروط الآتية:

a. $f'(\mathrm{c}) = 0$

b. $f'(\mathrm{c})$ غير موجودة (غير معرفة)

c. القيمة c هي القيمة النهائية للفترة المغلقة L أو نصف المغلقة.

ونبين هنا أنه لإيجاد القيمة الحرجة للدالة يتم إيجاد قيم x التي تكون عندها $f'(x) = 0$

أي $k_1 = \{ x : f'(x) = 0 \}$

كما يتم إيجاد x التي يكون عندها مشتقة الدالة غير موجودة أي:

$k_2 = \{ x : f'(x)$ غير موجودة $\}$

فإذا كانت $c_1, c_2, ...c_n \in k_1 \cup k_2 \cap L$

فتكون الفترات التي يتم فيها اختبار الدالة من حيث أن:

$f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$: هي

$$(c_n, b], ...\ .., (c_1, c_2), [a, c_1)$$

ونناقش ما إذا كانت $f'(x) > 0 \quad or \quad f'(x) < 0$ بمعنى نناقش التزايد أو التناقص للدالة عند كل فترة من هذه الفترات.

مثال:

أوجد النقاط الحرجة للدالة: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$

الحل:

نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x نضعها تساوي صفر ونحل المعادلة ذات المجهول x .

$$y' = f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

ومنها $x=-1$ أو $x=2$

نعوض في عبارة الدالة لكل قيمة لــ x .

عند $x = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 + 2 = \frac{-3}{4}$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 2 = \frac{19}{6}$$

وبما أن $f'(x)$ كثيرة حدود معرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية IR ، فإن النقاط الحرجة هي: $\left(-1, \frac{19}{6}\right), \left(2, \frac{-4}{3}\right)$

مثال:

أوجد جميع القيم الحرجة للدالة: $f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$

الحل:

واضح أن الدالة تأخذ الشكل التالي $f(x) = (x+5)^2 (x-4)^{\frac{1}{3}}$ وتكون مشتقتها كالتالي:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+5)^2 (x-4)^{\frac{-2}{3}} + 2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+5)^2}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}} + 2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+5)^2 + 6(x+5)(x-4)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{(x+5)[x+5+6x-24]}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}} \rightarrow f'(x)=\frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

النقاط الحرجة تحقق $f'(x)=0$ أو $f'(x)$ غير موجودة

إذا كانت $f'(x)=0$ فإن:

$$\frac{(x+5)(7x+19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}=0$$

إذا كان وفقط $(x+5)(7x-19)=0$

$$x=-5 \quad or \quad x=\frac{19}{7}$$

$f'(x)$ غير معرفة عندما المقام يساوي صفر

$$(x-4)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(x-4)^2}=0$$

أي عندما $x=4$

$\therefore$ مجموعة القيم الحرجة في x هي: $\left\{-5,\frac{19}{7},4\right\}$

2- **القيم العظمى والصغرى للدالة** Maximum and minimum values $f(x)$

تعريف:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة L وليكن c عدداً في هذه الفترة عندئذٍ:

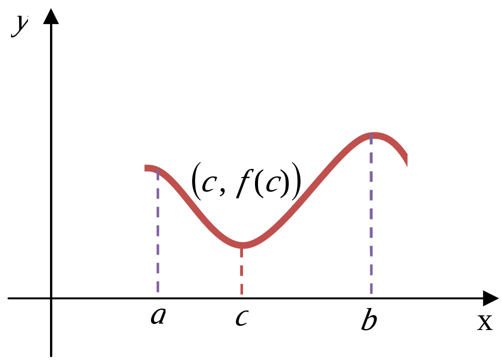
a. تسمى $f(c)$ قيمة عظمى للدالة $f(x)$ على الفترة L إذا كان:

$$f(x)\le f(c) \quad \forall \quad x\in L$$

b. تسمى $f(c)$ قيمة صغرى للدالة $f(x)$ على الفترة L إذا كان:

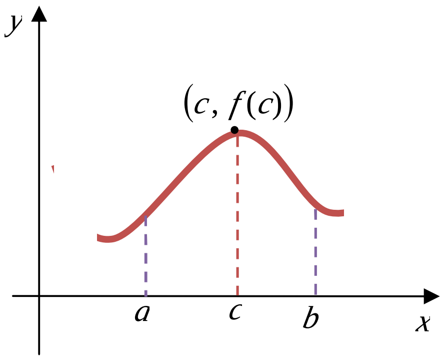
$$f(x)\ge f(c) \quad \forall \quad x\in L$$

وإذا كانت $f(c)$ قيمة صغرى(عظمى) للدالة $f(x)$ على الفترة L فإننا نقول بأن f تأخذ قيمة صغرى(عظمى) عند العدد c.



$f(c)$ قيمة صغرى للدالة $f(x)$

على الفترة I



$f(c)$ قيمة عظمى للدالة $f(x)$

على الفترة I

وبذلك تكون النقطة $(c, f(c))$ هي أعلى نقطة(أخفض)على منحنى الدالة $f(x)$ على الفترة $L=(a,b)$.

3- القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $f(x)$

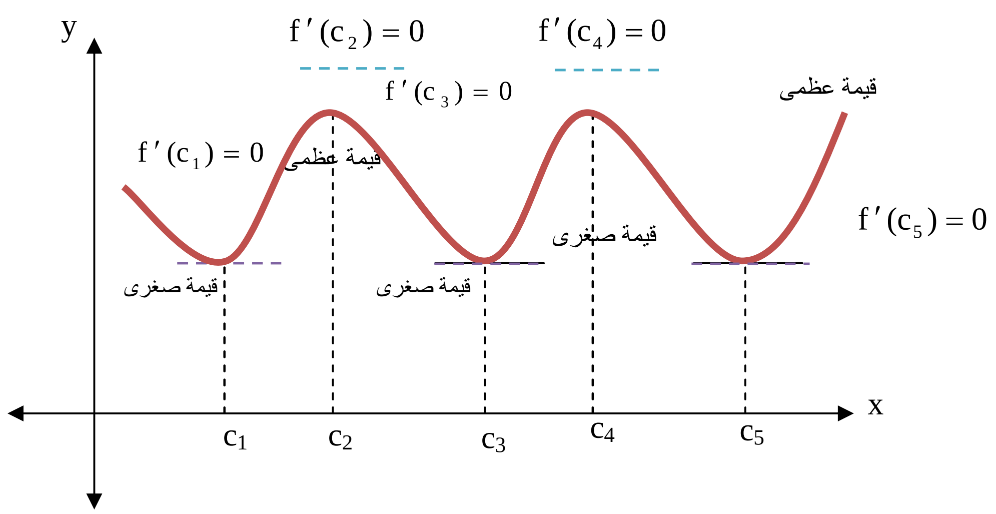
Maximum and Local minimum values Local

تعريف:

ليكن c عدداً في نطاق الدالة f عندئذٍ:

a- تسمى $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة $f(x)$ إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي على العدد c بحيث أن: $\forall\ x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \le f(c)$

b- تسمى $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة $f(x)$ إذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) تحتوي على العدد c بحيث أن: $\forall\ x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \ge f(c)$



القيم الحرجة Critical values

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) عندئذ ندعو $x=x_0$ نقطة حرجة إذا كان $f'(x_0)=0$ أو $f'(x_0)$ غير موجودة.

يبين التعريف التالي طريقة إيجاد القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الأولى للدالة:
لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال (a,b)، وإذا كانت $x=x_0$ قيمة حرجة للدالة $f(x)$ عندئذ:

1- إذا كان $f'(x)>0$ لجميع $x\in(a,x_0)$ و $f'(x)<0$ لجميع $x\in(x_0,b)$ عندئذ يكون للدالة $f(x)$ قيمة قصوى محلية $f(x_0)$ عند النقطة $x=x_0$.

2- إذا كان $f'(x)<0$ لجميع قيم $x\in(a,x_0)$ و $f'(x)>0$ لجميع $x\in(x_0,b)$ عندئذ يكون للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية $f(x_0)$ عند النقطة $x=x_0$.

3- إذا كان $f'(x)>0$ لجميع قيم $x\in(a,b)$ أو $f'(x)<0$ لجميع $x\in(a,b)$ عندئذ لا تملك الدالة $f(x)$ أي قيمة قصوى محلية أو صغرى محلية عند أي نقطة $x_0\in(a,b)$.

القيم القصوى المطلقة: Absolute Min Max Values

إذا كانت الدالة f دالة مستمرة على نطاقها وكان نطاقها D_f مجالاً مغلقاً عندئذ يكون لهذه الدالة قيم قصوى مطلقة (شاملة).

خطوات إيجاد القيم القصوى للدالة f المتصلة على فترة مغلقة $[a,b]$:

1- أوجد جميع القيم الحرجة في الفترة $[a,b]$.

2- احسب $f(c)$ لكل قيمة حرجة c.

3- احسب قيمة $f(a)\ ,\ f(b)$.

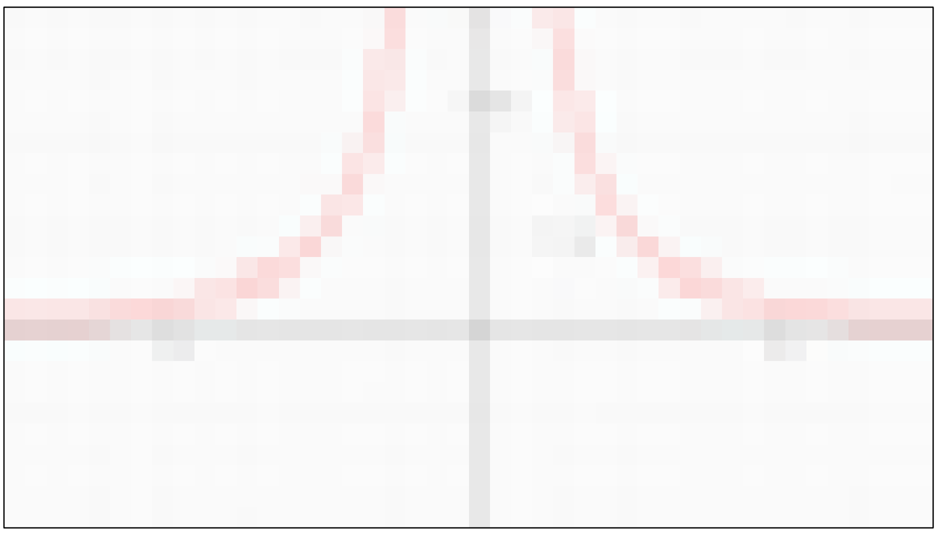
قارن القيم المحسوبة في (2)، (3) وبذلك تكون أكبر قيمة محسوبة هي القيمة العظمى للدالة f على الفترة $[a,b]$، وأصغر قيمة محسوبة هي القيمة الصغرى للدالة f على الفترة $[a,b]$.

مثال:

لتكن $f(x)=\frac{1}{x^2}$ أرسم الدالة و حدد ما إذا كانت f متزايدة أو متناقصة على الفترات المعطاة واوجد القيم القصوى على كل فترة

$$[1,2]\ ,\ (1,2]\ ,\ (1,2)\ ,\ [-2,-1]\ ,\ [-1,2]$$

الحل:



تفاضل الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ هو $f'(x) = -\frac{1}{x}$ منها نحصل على:

$$f'(x) > 0 \quad \Leftarrow \quad x < 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \Leftarrow \quad x > 0$$

القيم الصغرى	القيم العظمى	التناقص	التزايد	الفترات
$f(2) = \frac{1}{4}$	$f(1) = 1$	متناقصة		$[1,2]$
$f(2) = \frac{1}{4}$	لا توجد	متناقصة		$(1,2]$
لا توجد	لا توجد	متناقصة		$(1,2)$
لا توجد	$f(1) = 1$	متزايدة	متزايدة	$(-2,-1]$
$f(2) = \frac{1}{4}$	لا توجد	ليست متناقصة	ليست متزايدة	$[-1,2]$

مثال:

أوجد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية ثم أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة:

$$f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3 \quad , \quad x \in [-3,3]$$

الحل:

$$f'(x) = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = (2-x)\,(2+x)$$

$\therefore$ القيم الحرجة هي عندما $f'(x) = 0$

$$x = 2 \;,\; x = -2$$

$\therefore$ القيم الحرجة هي $\{-2,2\}$

$\therefore$ الفترات هي $[-3,-2)$, $(2,3]$, $(-2,2)$

وعلى ذلك فإنه يلزم تعيين إشارة $f'(x)$ على هذه الفترات كما يلي:

1) إذا كانت $x \in [-3,-2)$ فإن $f'(x) < 0$

فالدالة $f(x)$ تناقصية على الفترة (2- , 3-].

2) إذا كانت $x \in (-2,2)$ فإن $f'(x) > 0$

فالدالة $f(x)$ تزايدية على الفترة (2 , 2-).

3) إذا كانت $x \in \left(2,3\right]$ فإن $f'(x) < 0$

فالدالة $f(x)$ تناقصية على الفترة $\left(2,3\right]$.

نستنتج من (1) ، (3) أن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = -2$

وهي $f(-2) = \frac{-16}{3}$

ومن (2)، (3) نرى أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

وهي $f(2) = \frac{16}{3}$

بقي اختبار الدالة عند $x = -3 \,,\, x = 3$

وحيث أن قيمة الدالة تتناقص على الفترة $[-3, -2)$

لجميع قيم $x \in [-3, -2)$, $\therefore \; f(-3) > f(x)$

وبذلك تكون $f(-3) = -3$ قيمة عظمى محلية على الفترة $[-3, -2)$

كما يتضح أن قيمة الدالة تتناقص على الفترة $(2, 3]$

$\therefore \; f(3) < f(x)$

لجميع قيم $x \in (2, 3]$

وبذلك تكون $f(3) = 3$ قيمة صغرى محلية على الفترة $(2, 3]$.

مما سبق نرى أن القيم العظمى المحلية للدالة هي:

$$f(2) = \frac{16}{3} \quad , \quad f(-3) = -3$$

$\therefore$ القيمة العظمى المطلقة هي:

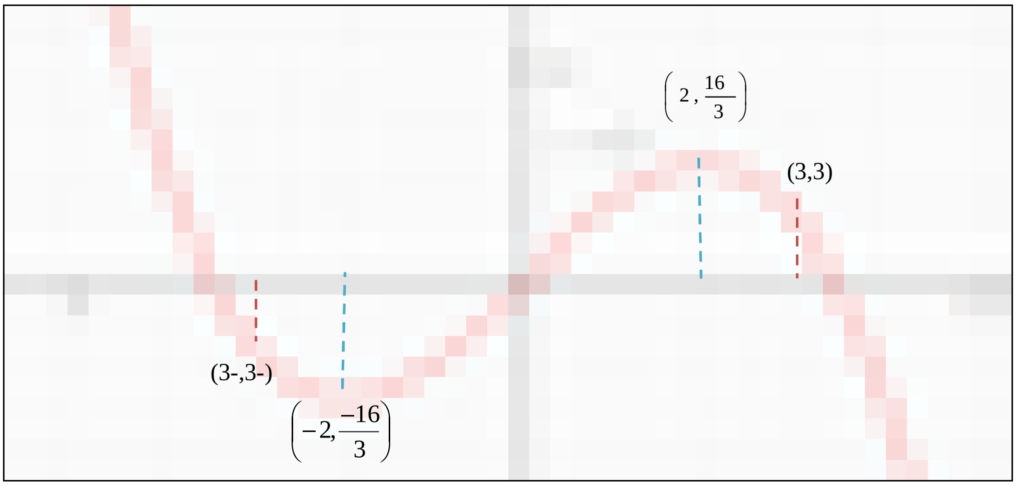
$$f(2) = \frac{16}{3}$$

أما القيم الصغرى المحلية هي:

$$f(-2) = \frac{-16}{3} \quad , \quad f(3) = 3$$

$\therefore$ القيمة الصغرى المطلقة هي: $f(-2) = \frac{-16}{3}$

وبيان الدالة هو:



مثال:

بفرض أن $f(x)=x^3-3x^2+4$ أوجد فترات تزايد وتناقص الدالة واحسب القيم الصغرى والعظمى وارسم الدالة.

الحل:

لبيان فترات تزايد وتناقص الدالة نوجد مشتقتها:

$f'(x)=3x^2-6x$ ومنها $f'(x)=3x(x-2)$

وبالتالي: $f'(x)>0$ ومنها $3x(x-2)>0$ هذا يؤدي إلى $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ والدالة متزايدة في المجال $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ وكذلك $f'(x)<0$ هذا يؤدي إلى $3x(x-2)<0 \Leftarrow x\in(0,2)$ والدالة متناقصة في المجال $(0,2)$ نحصل على القيم الصغرى والعظمى المحلية من خلال انعدام المشقة $x=2$ أو $x=0 \Rightarrow y'=0$ وبالتالي النقطة $(0,2)$ هما نقطتين جدتين كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0		2		$-\infty$
y'	+ الدالة تزايدية	0	− الدالة تناقصية	0	+ الدالة تزايدية	
y	$-\infty$ ↗	4 max	↘	0 min	↗	$+\infty$

4ـ اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى

Test first derivative for maximum and minimum values

لتكن f دالة متصلة عند العدد الحرج c وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة I التي تحتوي على العدد الحرج c، فيما عدا عند العدد c نفسه عندئذ:

a. إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من سالب إلى موجب (تغيرت $f(x)$ من تناقص إلى تزايد) عند العدد c فإن $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة $f(x)$.

b. إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من موجب إلى سالب (تغيرت $f(x)$ من تزايد إلى تناقص) عند العدد c فإن $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية للدالة $f(x)$.

c. إذا كانت $f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$ لكل $x \in I$ [فيما عدا عند العدد c] فإن $f(c)$ لا تعتبر قيمة قصوى محلية للدالة $f(x)$.

مثال:

أوجد القيمة العظمى المحلية أو الصغرى المحلية للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(8-x)$.

الحل:

إذا $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(8-x)$ بذلك نطاق الدالة هو $(-\infty, \infty)$

تحديد القيمة الحرجة $\therefore \quad f'(x) = x^{\frac{1}{3}}(-1) + (8-x)\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)$

$$= -x^{\frac{1}{3}} + \frac{(8-x)}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{-3x+8-x}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

إذا $\rightarrow \quad \frac{8-4x}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4(2-x)}{x^{\frac{2}{3}}} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad , \quad x \neq 0$

$x = 0$ قيمة حرجة لأن $f'(x)$ غير معرفة

كذلك $x = 2$ قيمة حرجة لأن $f'(x) = 0$

وبذلك يكون تقسيم فترات الاختبار كالآتي:

$$(-\infty, 0), \ (0, 2), \ (2, \infty)$$

الفترة	نقطة الاختبار	f′(x)	الدالة	القيم القصوى المحلية
$(-\infty\ ,0)$	-1	+	تزايدية	لا توجد قيم صغرى و لا عظمى
$(0,2)$	1	+	تزايدية	لا توجد قيم صغرى و لا عظمى
$(2,\infty)$	3	—	تناقصية	توجد قيم عظمى محلية

إذا القيمة العظمى المحلية هي $f(2)$ وتساوي $6\sqrt[3]{2}$

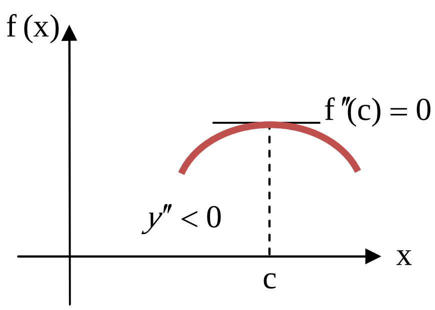
5- **الاختبار التفاضلي الثاني لتحديد القيم الصغرى والكبرى:**

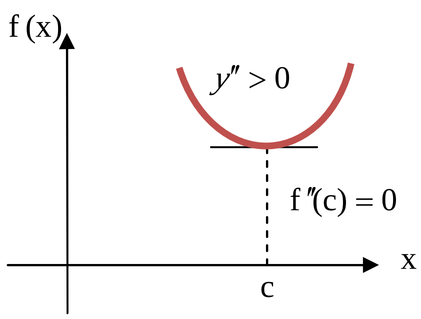
Test second derivative for determine maximum and minimum values □

باعتبار أن f دالة قابلة للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي عدداً c وكان $f'(x)=0$ فإنه:

1) إذا كان $f''(c)<0$ فإن $f(c)$ قيمة كبرى نسبية.

2) إذا كان $f''(c)>0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى نسبية.





ملاحظة:

- إذا كان $f'(c)$ كمية غير معرفة يستخدم الاختبار الأول.
- إذا كان $f'(c)=0$ يستخدم الاختبار الثاني.

مثال:

أوجد القيم الكبرى و الصغرى المحلية للدالة $f(x)$ حيث $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x^2-8)$.

الحل:

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}(2x)+(x^2-8)\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f'(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + \frac{2(x^2 - 8)}{3x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \frac{6x^2 + 2x^2 - 16}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\rightarrow \frac{8x^2 - 16}{3x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$\therefore$ القيم الحرجة هي:

$f'(x) = 0$ عندها $x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x)$ غير معرفة عندها $x = 0$

$\therefore$ الفترات هي: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$

نكون الجدول التالي:

القيم القصوى المحلية	الدالة f (x)	f'(x)	نقطة الاختبار	الفترة
	تناقصية	−	-2	$(-\infty,-\sqrt{2})$
f $(-\sqrt{2})$ توجد قيم صغرى محلية	تزايدية	+	−1	$(-\sqrt{2},0)$
f (0) توجد قيم عظمى محلية	تناقصية	−	1	$(0,\sqrt{2})$
f $(\sqrt{2})$ توجد قيم صغرى محلية	تزايدية	+	3	$(\sqrt{2},\infty)$

مثال:

أرسم الدالة $f(x) = x^3 - 27x$ أوجد القيم الكبرى والصغرى باستخدام الاختبار التفاضلي الثاني.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 27 \rightarrow 3(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$f''(x) = 6x$$

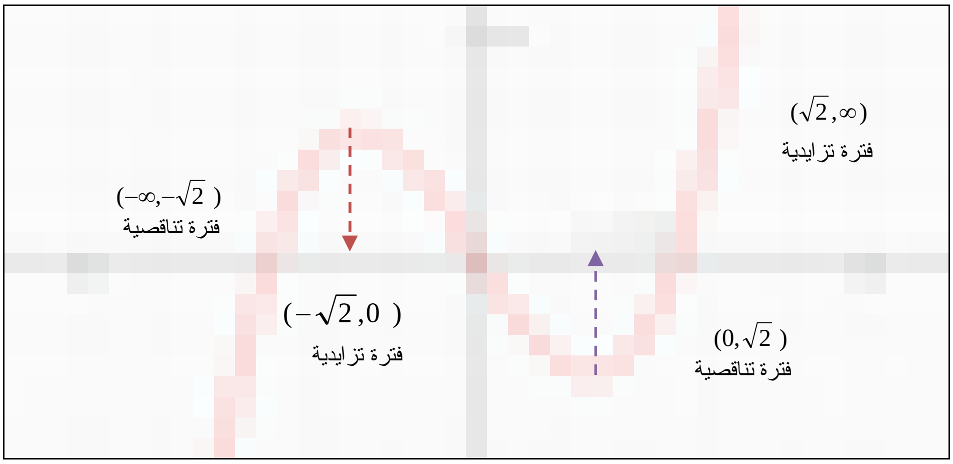
$\therefore$ باستخدام اختبار الأعداد الحرجة بالتفاضل الثاني

$$f''(3) = 18 > 0$$

$\therefore$ عند $x = 3$ قيمة صغرى والنقطة هي $(3, f(3)) \leftarrow (3,-54)$

$$f''(-3) = -18 < 0$$

$\therefore$ قيمة كبرى عند $x = -3$ والنقطة هي $(-3, f(-3)) \rightarrow (-3, 54)$



6- تقعر المنحنيات ونقاط الانقلاب (الانعطاف)

Concaveity of a curve and infections points

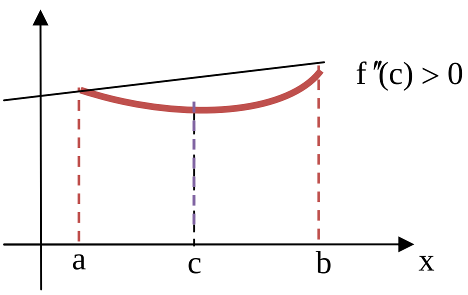
تعريف:

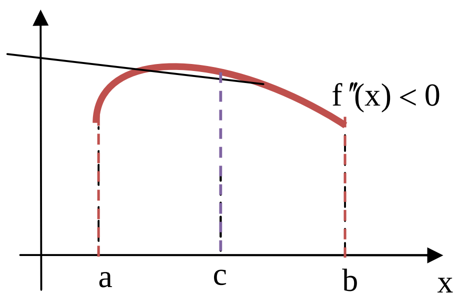
يقال لمنحنى الدالة f القابلة للاشتقاق في فترة I إنه مقعر للأعلى إذا كانت $f'(x) > 0$ في الفترة I ويقال أنه مقعر للأسفل إذا كانت $f'(x) < 0$ في تلك الفترة.

ولذلك يمكن أن نختبر تقعر المنحني لأي دالة كالآتي:

– منحنى الدالة f يكون مقعراً للأعلى إذا كانت $f''(x) > 0$ في الفترة I.

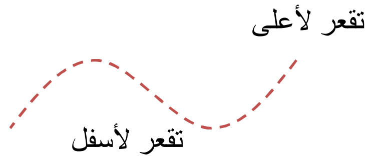
– منحنى الدالة f يكون مقعراً للأسفل إذا كانت $f''(x) < 0$ في الفترة I.





نقطة الانقلاب (الانعطاف) Inflection point:

هي النقطة التي يتغير عندها تقعر المنحنى من أعلى إلى أسفل أو العكس ويكون عندها $f''(c)=0$ ويقال للنقطة أنها نقطة انقلاب إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) تحوي عدداً c بحيث:



1. $f''(x)>0$ عندما $a<x<c$ و $f''(x)<0$ عندما $c<x<b$
2. $f''(x)<0$ عندما $a<x<c$ و $f''(x)>0$ عندما $c<x<b$

مثال:

أوجد نقطة الانقلاب للمنحنى $y=x^3$.

الحل:

نوجد المشتقة الأولى ثم الثانية:

$$\therefore\ y' = 3x^2 \Rightarrow \quad y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \quad \to \quad 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore\ y''>0 \quad \to \quad 6x>0 \quad \to \quad x>0$$

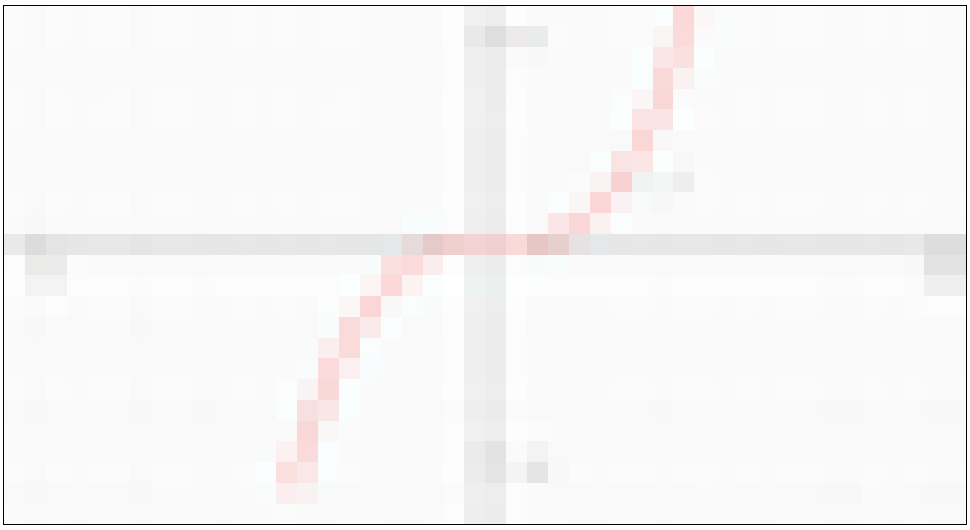
$$\therefore\ y''<0 \quad \to \quad 6x<0 \quad \to \quad x<0$$

$$\therefore\ y''<0 \quad \to \quad x\in(-\infty\ ,\ 0\ )$$

$$y''>0 \quad \to \quad x\in(\ 0\ ,-\infty\ )$$

$\therefore$ عند $x=0$ يوجد نقطة انقلاب وهي النقطة $(0\ ,0)$

نقطة الانقلاب	تقعر المنحنى	f′(x)	نقطة الاختبار	الفترة
$(0, f(0))$	**مقعر إلى أسفل**	−	-1	$(-\infty,0\ )$
$(0\ ,0)$	**مقعر إلى أعلى**	+	1	$(0,\infty\ )$



مثال:

أوجد نقطة الانقلاب للمنحنى $y = x^{\frac{1}{3}}$.

الحل:

$$y' = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

هذا يؤدي إلى $y'' = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{3} x^{\frac{-5}{3}}\right) = \frac{-2}{9} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$

$$\therefore \quad y'' > 0 \quad \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{x^5}} < 0 \quad \rightarrow \quad x < 0$$

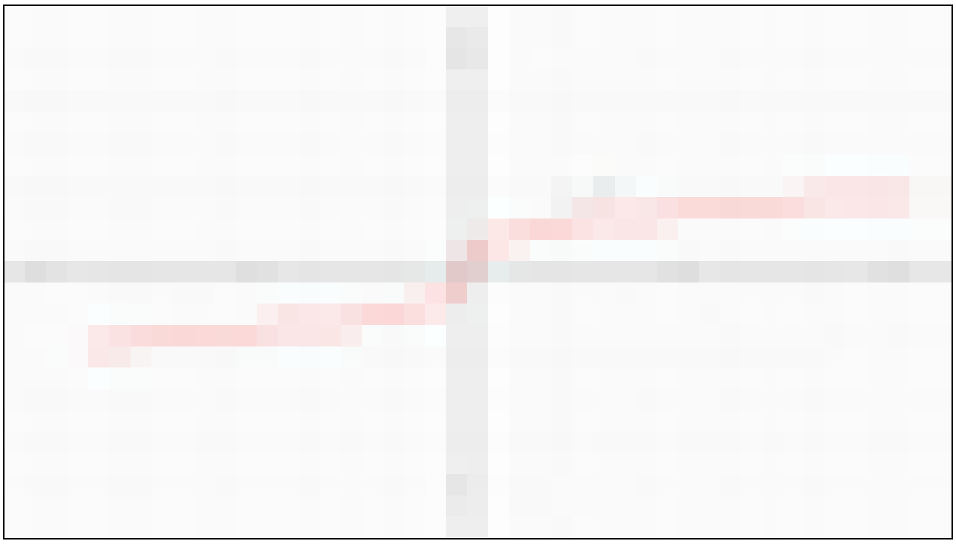
$$y'' < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} > 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^5} > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0$$

$\therefore$ الفترة $(-\infty, 0)$ تكون $y'' > 0$ (تقعر إلى الأعلى)

وفي الفترة $(0, +\infty)$ تكون $y'' < 0$ (تقعر إلى الأسفل)

$\therefore$ عند $x = 0$ توجد نقطة انقلاب هي $(0, f(0))$ وهي $(0, 0)$.

الفترة	نقطة الاختبار	$f''(x)$	تقر المنحنى	نقطة الانقلاب
$(-\infty, 0)$	-1	$+$	مقعر أعلى	$(0, 0)$
$(0, \infty)$	1	$-$	مقعر أسفل	$(0, 0)$



7- رسم المنحنيات Graph curves

لكي نقوم برسم منحني ما نبتع الخطوات الآتية:

1) نوجد $f'(x)$, $f''(x)$ للدالة $f(x)$.

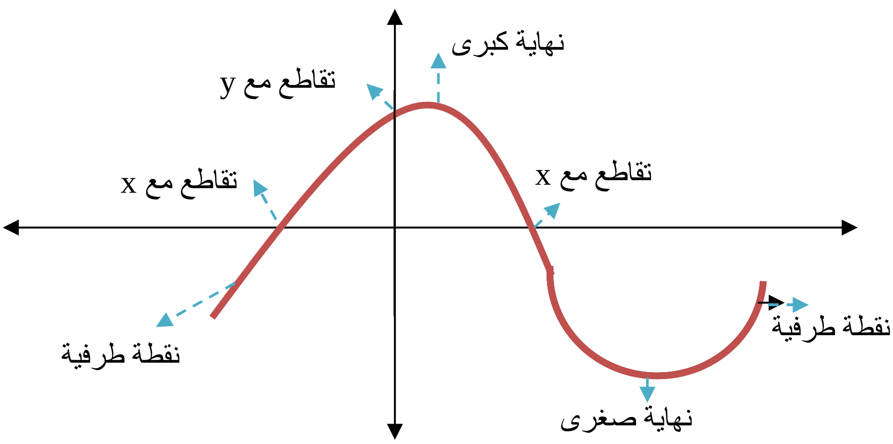
2) نحدد الفترات التي تتزايد فيها الدالة، والفترات التي تتناقص فيها الدالة.

3) نحدد أنواع التقعر للمنحنى خلال الفترات المختلفة.

4) نبيّن النقاط المهمة على الرسم مثل:

النقاط الحرجة، نطاق الانقلاب، نقاط القيمة الطرفية و نقاط تقاطع المنحني مع محور x ومحور y.

1



مثال:

ارسم المنحنى للدالة $y = f(x)$ حيث $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ في الفترة $(-10,10)$.

الحل:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$\therefore \quad 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 12) = 0$$

$$\therefore\ x = 0 \ , \ x = 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

– نوجد القيم الكبرى والصغرى بالتفاضل الثاني

$$f''(3) = 12(9) - 24(3)$$

$$= 108 - 72 \quad > 0$$

∴ توجد قيمة صغرى عند النقطة $(3, f(3)) \leftarrow (3,-17)$

التقعر والانقلاب:

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 - 24x = 0$$

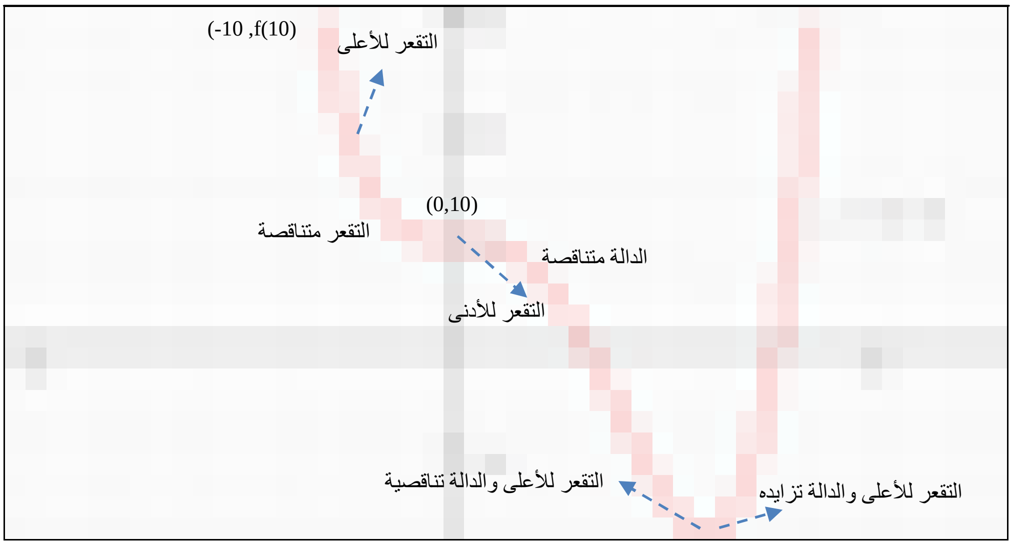
$$12x(x-2) = 0$$

$$\therefore\ x = 0 \quad , \quad x = 2$$

نقطة الانقلاب الأولى هي: $x = 2 \rightarrow (2, f(2)) \rightarrow (2,-6)$

نقطة الانقلاب الثانية هي: $x = 0 \rightarrow (0, f(0)) \rightarrow (0,10)$

x	-10	بينهما	0	بينهما	2	بينهما	3	بينهما	10
f'	الدالة متناقصة	−	0	−	الدالة متناقصة	−	-1	+	الدالة متزايدة
f''	التقعر للأعلى	+	0	−	التقعر للأدنى	+	1	+	التقعر للأعلى
f	14010	+	10	−	6−	−	3	-17	
	لا توجد نهاية		لا توجد نهاية		لا توجد نهاية		نهاية صغرى		لا توجد نهاية



مثال:

ارسم منحنى الدالة $f(x) = \sin x$ على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل:

بما أن $x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$f'(x) = \cos x \;\rightarrow\; f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{n\pi}{2} \quad , \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

و القيم الواقعة ضمن الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ هي: $n = \pm 1, \pm 3, \ldots\ldots\ldots$

$$f''(x) = -\sin x \;\rightarrow\; f''(x) = 0 \;\rightarrow\; \sin x = 0$$

$$\therefore \quad x = n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

و القيم الواقعة ضمن الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ هي: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots\ldots\ldots\ldots$

الفترة	نقطة الاختبار	$f'(x)$	الدالة	
$\left(-2\pi,-3\frac{\pi}{2}\right)$	$-5\frac{\pi}{3}$	+	تزايدية	← نهاية عظمى
$\left(-3\frac{\pi}{2},-\frac{-\pi}{2}\right)$	$-5\frac{\pi}{4}$	−	تناقصية	← نهاية صغرى
$\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	+	تزايدية	← نهاية عظمى
$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$5\frac{\pi}{4}$	−	تناقصية	← نهاية صغرى
$\left(3\frac{\pi}{2},2\pi\right)$	$5\frac{\pi}{3}$	+	تزايدية	← نهاية عظمى

عند $x=-3\frac{\pi}{2}$ توجد نهاية عظمى $\left(\frac{-3\pi}{2}, f(-3\frac{\pi}{2})\right) = \left(\frac{-3\pi}{2}, 1\right)$

عند $x=\frac{-\pi}{2}$ توجد نهاية صغرى $\left(\frac{-\pi}{2}, f(\frac{-\pi}{2})\right) = \left(\frac{-\pi}{2}, -1\right)$

عند $x=\frac{\pi}{2}$ توجد نهاية صغرى $\left(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

عند $x=3\frac{\pi}{2}$ توجد نهاية صغرى $(3\frac{\pi}{2}, f(3\frac{\pi}{2})) = \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

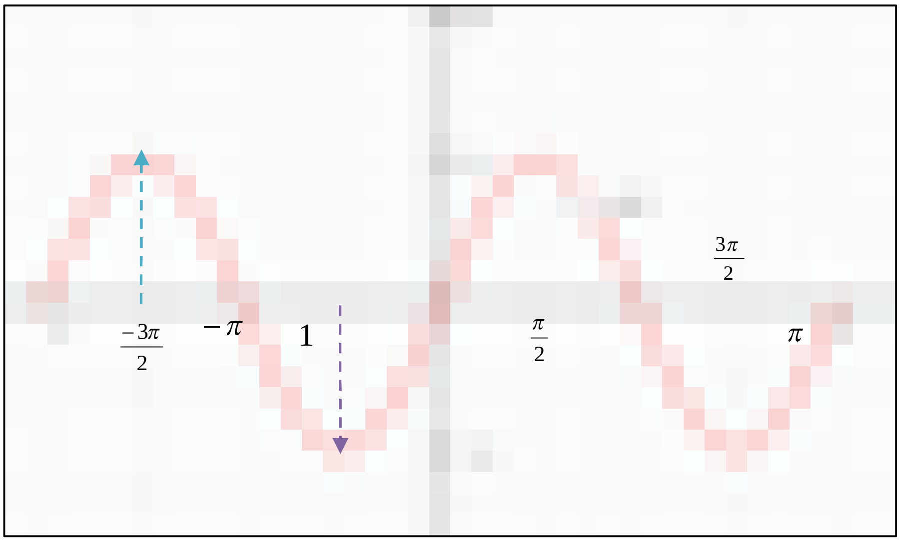
التقعر ونقاط الانقلاب:

الفترة	نقطة الاختبار	$f''(x)$	التقعر	الانقلاب
$(-2\pi,-\pi)$	$-3\frac{\pi}{2}$	−	لأسفل	
$(-\pi,0)$	$\frac{-\pi}{2}$	+	لأعلى	$(-\pi,0) \leftarrow x=-\pi$
$(0,\pi)$	$\frac{\pi}{2}$	−	لأسفل	$(0,0) \leftarrow x=0$
$(\pi,2\pi)$	$3\frac{\pi}{2}$	+	لأعلى	$(\pi,0) \leftarrow x=\pi$

∴ الدالة $f(x)=\sin x$

تزايدية عند: $\left(-2\pi,\frac{-3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

تناقصية عند: $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$



8- تطبيقات على القيم الصغرى والكبرى

Applications of Maximum and Minimum values

لحل المسائل التطبيقية التي تعتمد على القيم العظمى، توجد عدة خطوات يجب اتبعاها لحل مثل هذه المسائل.

1. اقرأ المسألة عدة مرات وتعرف على المعطيات والمطلوب.
2. ارسم شكلاً بيانياً للمسألة إن طلب ذلك.
3. اكتب المعطيات على صورة معادلات.
4. تعرف على المتغير الذي يجب حسابه على شكل قيم عظمى أو صغرى.
5. أوجد تفاضل هذا المتغير بالنسبة للمتغير الآخر ثم ساوي هذا التفاضل بالصفر واوجد جذور هذه المعادلة.

مثال:

أوجد عددين موجبين حاصل جمعهما 24، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل:

نفرض أن العددين هما x , y و حاصل ضربهما z.

$$\therefore \quad x + y = 24 \quad \rightarrow \quad y = 24 - x$$

$$z = x \times y \quad \rightarrow \quad z = x(24 - x) = 24x - x^2$$

$$\because \quad z_{\max} \text{ أكبر ما يمكن } \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = 24 - 2x \quad \rightarrow \quad 24 - 2x = 0$$

$$\therefore \quad z = (12).(12) = 144 \ , \ y = 24 - 12 = 12 \ , \ x = 12$$

إذا العددان هما $x = 12$ و $y = 12$ كما أن $z = 144$

مثال:

أوجد حجم اسطوانة دائرية قائمة رسمت داخل مخروط ارتفاعه 12 سم ونصف قطر قاعدته 4 سم، إذا كان محور الاسطوانة والمخروط متطابقين بحيث يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن.

الحل:

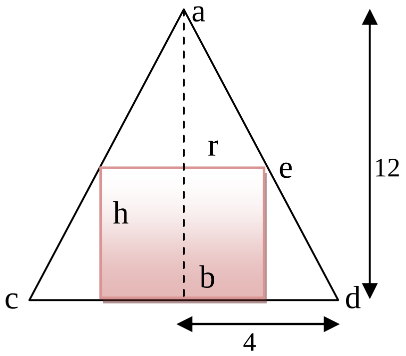
نفرض أن حجم الاسطوانة V

$$\therefore V = \pi r^2 h$$

حيث: h ارتفاع الاسطوانة و r نصف قطر الاسطوانة

ارتفاع المثلث أي مثلث (cde) = ارتفاع الاسطوانة(ce)

حيث أن $\frac{ec}{cd} = \frac{ab}{bd}$



$$\frac{12}{4} = \frac{h}{4-r} \quad \rightarrow \quad h = 3(4-r)$$

$$\therefore v = 3\pi r^2(4-r) = 3\pi(4r^2 - r^3)$$

$$\frac{dv}{dr} = 3\pi(8r - 3r^2)$$

$$\frac{dv}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad 3\pi(8r - 3r^2) = 0$$

$$r(8-3r) = 0 \rightarrow \therefore \quad r = \frac{8}{3} \quad , \; r = 0$$

لا يمكن أن يكون $r=0$ إذا هذا الحل مرفوض (لا معنى له).

إذا الحل هو $r = \frac{8}{3}$ وبما أن حجم الاسطوانة هو: $V = \pi r^2 h$ منها يكون لدينا:

$$V = 3\pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 \times (4 - r)$$

$$= 3\pi\left(\frac{8}{3}\right) \times \left(4 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 256\,\frac{\pi}{9}$$

مثال:

اسطوانة دائرية قائمة يتزايد طولها بمعدل $(2\, m/\sec)$ ويتناقص نصف قطرها بمعدل $(1\, m/\sec)$ فإذا كان طولها 20 متر، اوجد معدل تغير حجمها عند هذه اللحظة.

الحل:

نفرض أن طول الاسطوانة l ونصف قطرها r وحجمها V إذا:

$$\frac{dr}{dt} = -1\ m/\sec \quad , \quad \frac{dl}{dt} = 2\ m/\sec \quad , \quad l = 20\ m$$

$$\because \quad V = \pi r^2 l$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} l + \pi r^2 \frac{dl}{dt}$$

بالتعويض بالقيم المعطاة يكون:

$$\frac{dV}{dt} = 2\times\pi\times5\times(-1)\times20+\pi(5)^2\times2$$

$$= 40\pi \quad m^3/\sec$$

مثال:

نقطة تتحرك حول الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=16$ وعندما يكون إحداثي النقطة $(-\sqrt{2},\sqrt{6})$ يزداد الإحداثي السيني بمعدل قدره $20\ m/\sec$ فكم يكون معدل تغيير الإحداثي الصادي في تلك اللحظة.

الحل:

بما أن معادلة الدائرة هي: $x^2+y^2=16$

نقوم بالتفاضل بالنسبة للزمن.

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad (1)$$

بالتعويض بـــــ $(-\sqrt{2},\sqrt{6})$ في المعادلة (1)

$$2(-\sqrt{2})\frac{dx}{dt}+2(\sqrt{6})\frac{dy}{dt}=0$$

$$2(\sqrt{2})\frac{dx}{dt}=2(\sqrt{6})\frac{dy}{dt}$$

$$\because \quad \frac{dx}{dt}=20 \quad \rightarrow \quad 2(\sqrt{2})(20)=2(\sqrt{6})\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(\sqrt{2})(20)}{2(\sqrt{6})} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=11.547\ m/\sec$$

مثال:

بلون على شكل كرة مليء بالغاز انكمش بفعل الغاز بحيث احتفظ بشكله الكروي، اوجد طول نصف قطره عندما يكون نسبة معدل نقص حجمه إلى معدل نقص قطره تساوى π 1000.

الحل:

$$\frac{dV}{dt} : \frac{dr}{dt} = 1000\,\pi$$

بما أن حجم الكرة يساوى $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ فإن:

$\frac{dv}{dt} = 3\frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ بالتالي يكون لدينا:

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} : \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2$$

$$4\pi r^2 = 1000\pi \quad \rightarrow \quad 4r^2 = 1000$$

$$r^2 = 250 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{250}$$

9- **قاعدة لوبيتال** L'H0pital rule

1− مبرهنة (قاعدة أوبتيال صيغة $\frac{0}{0}$):

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فيهما: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

وفيما عدا ذلك فإن $f(x)$ و $g(x)$دالتان قابلتان للتفاضل على الفترة المفتوح I الذي يحوي النقطة $x = a$ وكذلك فإن $g'(x) \neq 0$ ماعدا $x = a$ عندئذ:

$$\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f'(x)}{\lim_{x\to a} g'(x)}$$

إذا كانت النهاية اليمنى موجودة.

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$ عندما $x \leftarrow 0$ موضحاً بيان الدالة.

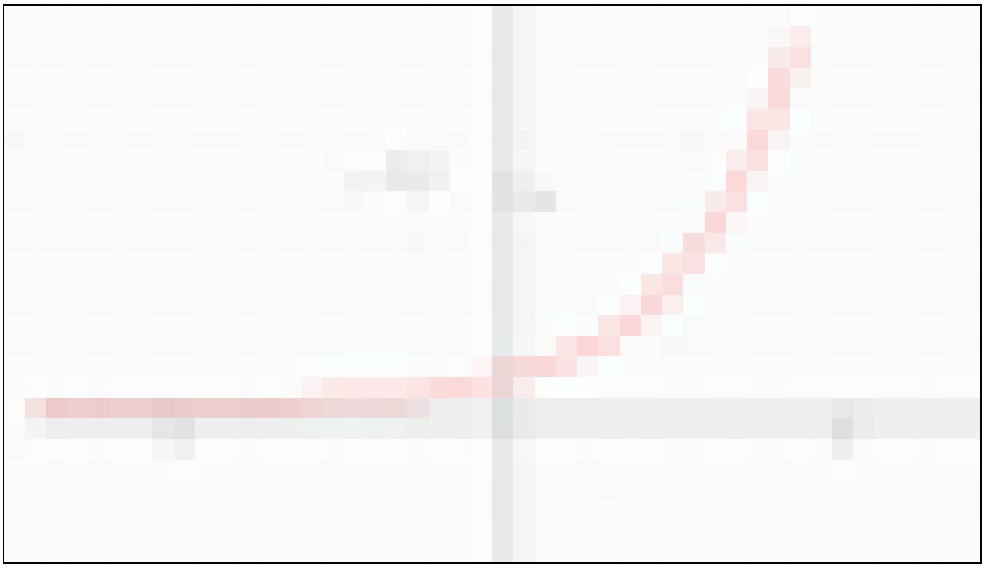
الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة أوبتيال نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2e^{0}=2$$



مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x)=\dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$ عندما $x \leftarrow 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة أوبتيال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi \sin \pi x}{2x-2}=\frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة أوبتيال مرة آخري نحصل على:

$$\therefore = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi \sin \pi x}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2}=\frac{-\pi^2(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

2- مبرهنة (قاعدة لوبيتال صيغة $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $x \leftarrow 0$):

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فيهما:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

وفيما عدا ذلك فإن $f(x)$ و $g(x)$دالتان قابلتان للتفاضل على المجال المفتوح I الذي يحوي النقطة $x = a$ وكذلك فإن $g'(x) \neq 0$ ماعدا $x = a$ عندئذ:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

في حال وجود الطرف الأيمن موجوداً.

3- مبرهنة (قاعدة لوبيتال صيغة $\frac{\infty}{\infty}$عندما $x \leftarrow \infty$):

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فيهما:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

وفيما عدا ذلك فإن $f(x)$ و $g(x)$دالتان قابلتان للتفاضل على الفترة المفتوح I الذي يحوي النقطة $x = a$ وكذلك فإن $g'(x) \neq 0$ ماعدا $x = a$ عندئذ:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty - \infty$$

إذا كان الطرف الأيمن موجوداً.

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة آخري نحصل على:

$$\therefore = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = (\sec x - \tan x)$ عندما $\frac{\pi}{2}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \infty - \infty$$

نحاول إصلاح هذه النهاية لتصبح من شكل $\frac{0}{0}$ ونطبق عليها قاعدة لوبيتال.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال **نحصل على:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right)$$

$$= \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0$$

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \left(\frac{1}{x} - c\sec x \right)$ عندما $x \leftarrow 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - c\sec x \right) = \infty - \infty$

نحاول إصلاح هذه النهاية لتصبح من شكل $\frac{0}{0}$ ونطبق عليها قاعدة لوبيتال.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - c\sec x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة آخري نحصل على:

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x} = \frac{-\sin x}{-x\sin x + 2\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة:: $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نفرض $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ونأخذ ln الطرفين نحصل على:

$$\ln y = \frac{1}{x^2}\ln(\cos x) = \frac{\ln\cos x}{x^2}$$

نأخذ نهاية الطرفين نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{-2x\sin x + 2\cos x} = \frac{-1}{2}$$

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = \frac{-1}{2} = \ln e^{\frac{-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

أمثلة محلولة

1- حدد المجالات التي تكون فيها الدالة التالية متزايدة أو متناقصة وأوجد جميع النقاط الحدية وارسم هذه الدالة: $y = 6x^5 - 3x^4 + 30x^3 + 100$.

الحل:

مشتقة الدالة هي: $y' = 30x^4 - 120x^3 + 90x^2$ التي تكون على الشكل التي:

$$y' = 3x^2(10x^2 - 40x + 30) = 30x^2(x^2 - 4x + 3)$$

في حالة:

$$y' > 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) > 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) > 0$$

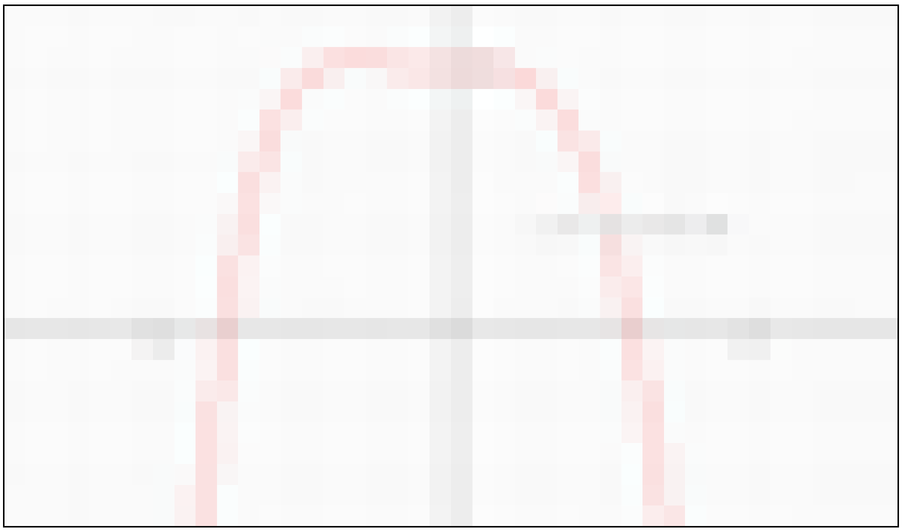
إذا فترات التزايد $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$

أما في حالة: $y' < 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) < 0$

وفي هذه الحالة فترة التناقص هو: $x \in (1,3)$

في حالة: $y' = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $x = 3$

والنقاط الحدية هي: $(1,0)$ و $(3,0)$ وبيان الدالة هو:



2- إذا كان $f(x)=x^2-8x$ فأثبت أن f تحقق نظرية القيمة الوسطى على الفترة $[1,8]$ ، واوجد العدد C في تلك الفترة يحقق المبرهنة.

الحل:

نوجد كلا من: $f(1)=1^2-8(1)=-7$

$$f(8)=8^2-8(8)=0$$

نوجد المشتقة: $f'(x)=2x-8$ نضع $x=C$ فنحصل على $f'(C)=2C-8$ وبتعويض في القانون نحصل على:

$$f'(C)=\frac{f(8)-f(1)}{8-1}$$

$$2C-8=\frac{0+7}{7}=1$$

منها قيمة $C=4.5$ وهي تقع في الفترة $[1,8]$.

3- إذا كانت $f(x)=4x^2-20x+30$ اثبت أن f تحقق نظرية رول على الفترة $[1,4]$ واوجد قيم C التي تحقق $f'(C)=0$.

الحل:

نوجد كلا من: $f(1)=4-20+30=14$

$$f(4)=4(4)^2-20(4)+30=14$$

منها نجد أن: $f(1)=f(4)=14$

نوجد مشتقة الدالة: $f'(x)=8x-20$ نعوض عن $x=C$ ونساويها بصفر

$$f'(C)=8C-20$$

$8C-20=0$ منها $C=\frac{5}{2}$ وضح أن: $4<\frac{5}{2}<0$ فهي تحقق مبرهنة رول.

4- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x-\sin x}$ عندما $x \leftarrow 0$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x - \sin x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{1 - \cos x} = \frac{2}{0} = \infty$$

5- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^{3}}$ عندما $x \to 0$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

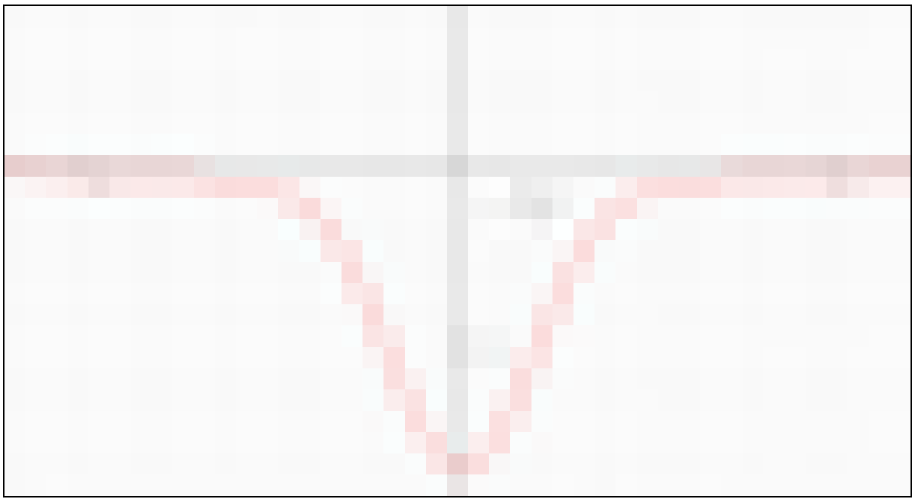
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^{3}} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^{2}} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$



6- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x}$ عندما $x \leftarrow 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

7- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ عندما $x \leftarrow \infty$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على: $\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x \times \frac{1}{x}}{1} = \frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\times\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -2x = -\infty$$

8- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{x}{\ln(1+2e^x)}$ عندما $x \leftarrow \infty$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

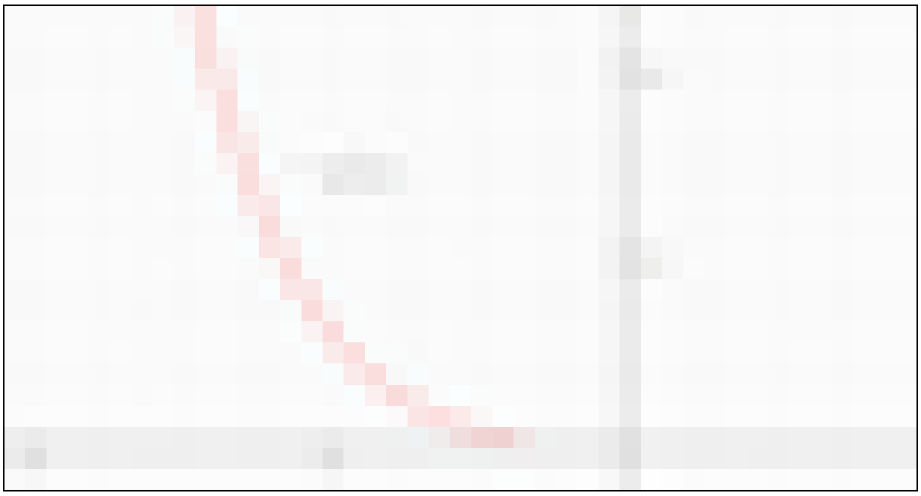
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+2e^x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2e^x}{1+2e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2e^x}{2e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{2e^x} = 1$$



9- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$ عندما $x \leftarrow \infty$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$$

10- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = x^2 e^{-x}$ عندما $x \leftarrow \infty$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$



11-أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = x^2 \ln x$ عندما $x \to 0^+$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0 \times \infty$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\Big/ -2\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = 0$$

12-استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم الكبرى والصغرى للدالة: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نوجد مشتقة الدالة على الشكل التالي:

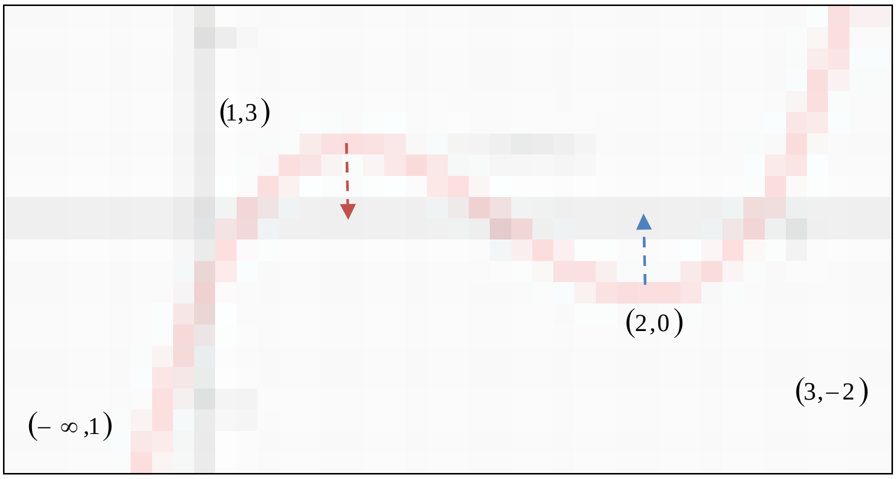
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x-1)(x-3)$$

حلول المعادلة $f'(x)=0$ هي: $x=1$ و $x=3$ وبالتالي يكون لدينا:

x	$-\infty$	بينهما	1	بينهما	3	بينهما	∞
f'		+	0	−	0	+	

وبالتالي الدالة متزايدة في الفترتين: $(-\infty,1)$ و $(3,\infty)$ ومتناقصة في الفترة $(1,3)$ وبالتالي الدالة تملك نهاية كبرى محلية عند النقطة $(1,2)$ ونهاية صغرى محلية عند النقطة $(3,-2)$ كما موضح في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		3		∞
y	$-\infty$	↗	2 max	↘	-2 min	↗	$+\infty$



13- استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم الكبرى و الصغرى للدالة: $f(x)=x^3-12x^2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نوجد المشتقة للدالة: $f'(x)=3x^2-24x=3x(x-8)$

بوضع $f'(x)=0$ نحصل على:

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ أو $x=8$

نوجد المشتقة الثانية للدالة: $f''(x)=6x-24=6(x-4)$

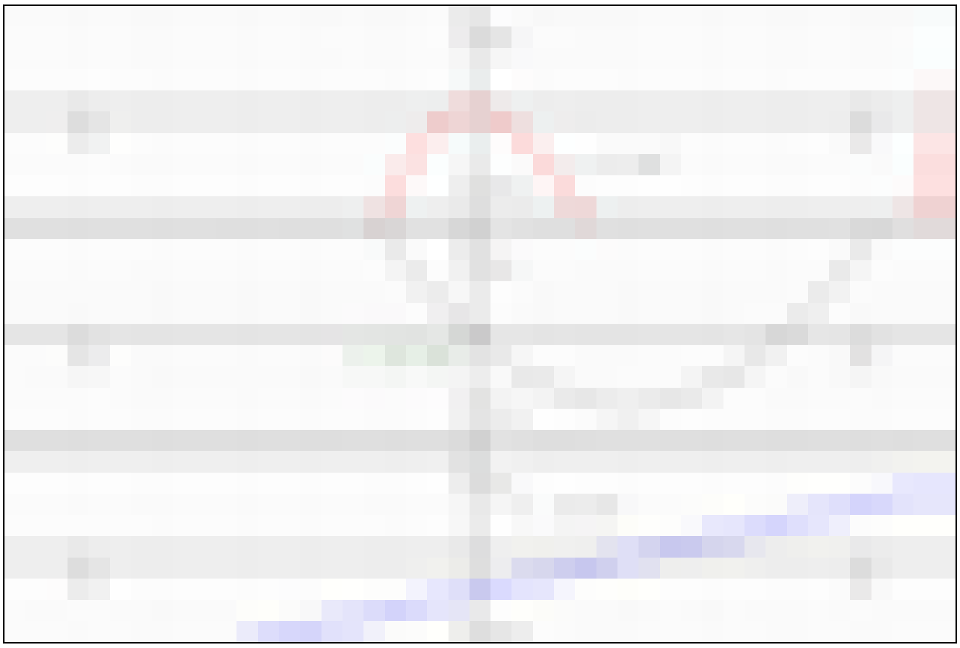
عند $x=0$ نجد أن:

$f''(x)=-24<0$ وبالتالي فإن النقطة $(0,0)$ هي نهاية كبرى محلية

وعند $x=8$ فإن:

$f''(x)=24>0$ وبالتالي فإن النقطة $(8,-256)$ هي نهاية صغرى محلية.

كما موضح في الشكل التالي:



14- أرسم الدالة: $f(x)=x^3-12x$ باستخدام اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم الكبرى والصغرى.

الحل:

1- نلاحظ أن نطاق الدالة هو R.

2- عندما $x=0$ فإن $y=0$

عندما $y=0$ فإن $x(x^2-12)=0$ وبالتالي فإن: $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$ أو $x=0$

نقاط التقاطع مع المحورين هي: $(2\sqrt{3},0)$ و $(-2\sqrt{3},0)$ و $(0,0)$

3- لنحدد الآن فترات التزايد والتناقص:

$$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \text{ أو } x=-2$$

كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	2	بينهما	∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

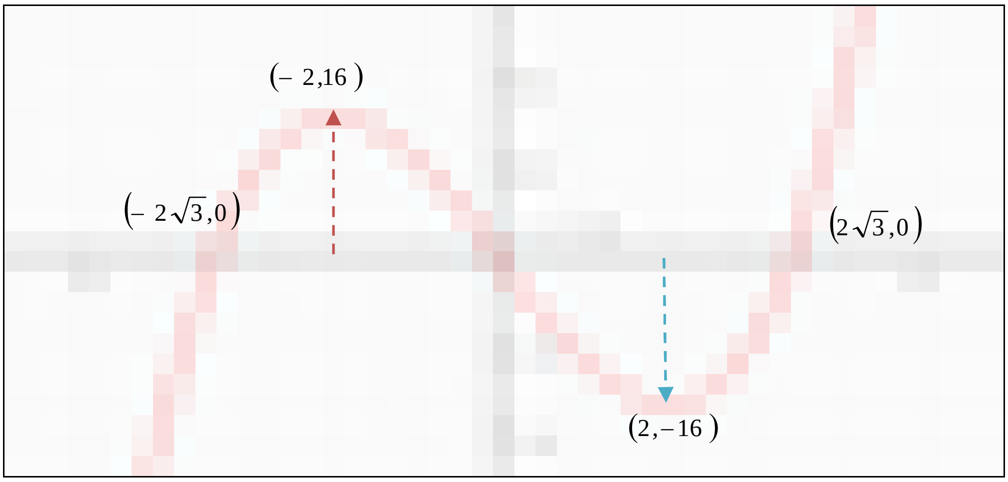
فترات التزايد هي: $(2,\infty)$ و $(-\infty,-2)$

فترات التناقص هي: $(-2,2)$

4- نوجد النهايات الحدية

x	$-\infty$		-2		2		∞
y	$-\infty$	$\nearrow$	16 max	$\searrow$	-16 min	$\nearrow$	$+\infty$

إذا هناك نهاية كبرى محلية عند النقطة $(-2,16)$ ونهاية صغرى محلية عند النقطة $(2,-16)$.



15- أوجد نقاط الانقلاب للدالة: $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

يجب أن نحسب y''.

بما أن:
$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

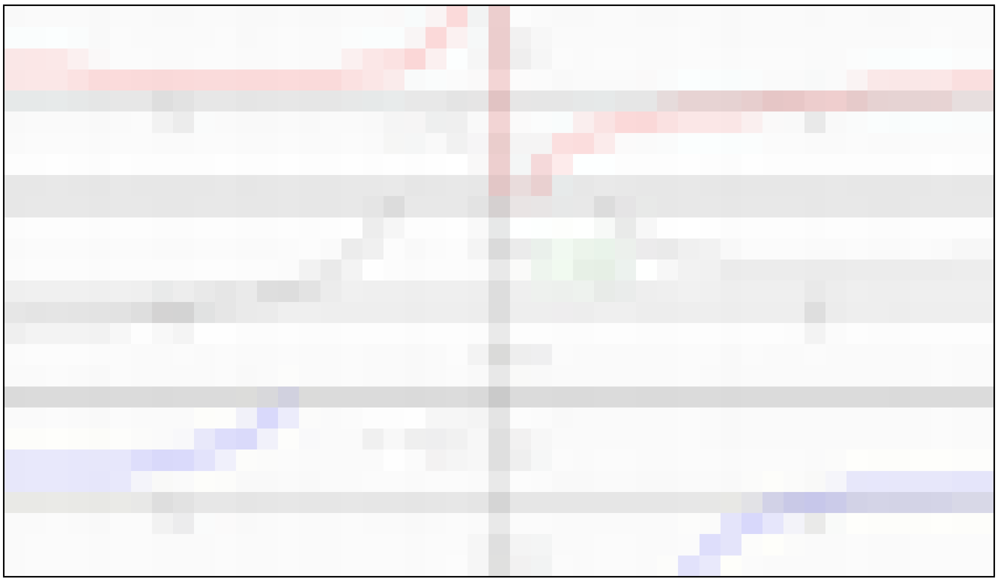
فإن:
$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

منها نجد أن:
$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$$
$$= \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$$

بوضع $y''=0$ نحصل على: $y''=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	بينهما	0	بينهما	1	بينهما	∞
f''		+	II	−	0	+	

المنحني مقعر إلى أعلى في الفترة $(-\infty,0)$ وفي الفترة $(1,\infty)$ ومقعر إلى أسفل في المجال $(0,1)$ ونقطة الانقلاب عند $(1,0)$ كما موضح في الشكل التالي:



16- يراد صنع علب للمشروب بحجم $100cm^2$ على شكل اسطوانة دائرية قائمة بغطاء، علماً بأن للغطاء حافة تساوي $\frac{1}{10}$ من ارتفاع الاسطوانة، أوجد أبعاد هذه العلب بحيث تكون بأقل التكاليف.

الحل:

بفرض r هو نصف القطر و h هو الارتفاع عندها بحجم العلبة $v = \pi r^2 h$

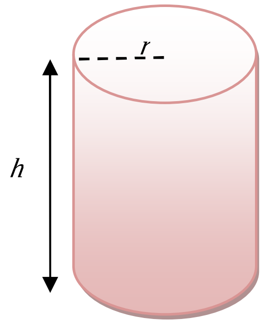
منها $100 = \pi r^2 h$ ∴ بذلك نجد أن: $h = \frac{100}{\pi r^2}$

مساحة الشريحة = مساحة الحافة + مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{h}{10}$$

$$= 2\pi r(h + r + \frac{h}{10})$$

$$= 2\pi r(r + \frac{11h}{10})$$



ولتقليل التكاليف يجب جعل هذه المساحة أصغر ما يمكن.

$$A = 2\pi r(h + r + \frac{h}{10})$$

ولدينا $h = \frac{100}{\pi r^2}$ وبالتالي يكون:

$$A = 2\pi r^2 + \frac{220}{r}$$

وبتفاضل A بالنسبة لــ r نحصل على: $\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{220}{r^2}$

ونحصل على القيمة القصوى عندما $\frac{dA}{dr} = 0$ أي أن:

$$4\pi r - \frac{220}{r^2} = 0 \rightarrow 4\pi r^3 - 220 = 0$$

$$r = \left(\frac{110}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3.25\, cm$$

ومنها نحصل على: $h = \frac{100}{\pi(3.25)^2}$

ولمعرفة هل هذه القيم تمثل نهاية صغرى أم عظمى نحسب $\frac{d^2A}{dr^2}$

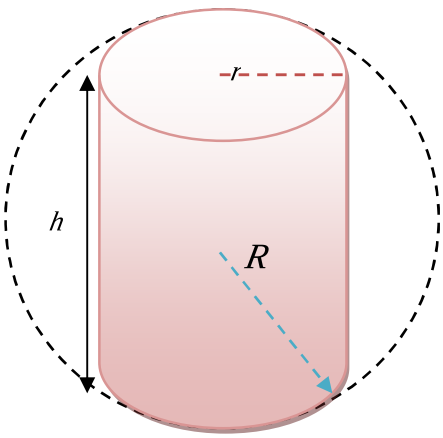
فنجد: $\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi + \frac{440}{r^3} > 0$

إذا فعلاً القيم المحسوبة تمثل نهاية صغرى للمساحة.

17- أوجد أكبر حجم اسطوانة دائرية قائمة من الممكن أن تمس حافتي قاعدتها السطح الداخلي لقشرة كروية نصف قطرها R.

الحل:

لكي نعبر عن حجم الاسطوانة V بدلالة متغير واحد نوجد علاقة بين نصف قطر الاسطوانة r وارتفاعها h ، حسب نظرية فيثاغورث لدينا:



$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi h(R^2 - \frac{1}{4}h^2)$$

$$= \pi\,(hR^2 - \frac{1}{4}h^3)$$

ولحساب القيمة العظمى للحجم v نحسب $\frac{dv}{dh}$ على النحو التالي:

$$\frac{dV}{dh} = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = 0$$

منها نحصل على: (1) $h^2 = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$

عندئذ: (2) $r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}R$

وبحساب المشتقة الثانية: $\frac{d^2v}{dh^2} = -\frac{3}{2}\pi h < 0$ تكون النهاية عظمى.

كما أن:

$$V_{\max} = \pi\left(R^2\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}R\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9}R^3\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}R^2}{9}$$

18-أبحرت سفينة A في الساعة العاشرة صباحاً من نقطة إحداثياتها $(40,10)$ متجهة نحو الشمال (المحدد y) بسرعة 50 كيلومتر/ ساعة وفي نفس الوقت أبحرت سفينة B من النقطة $(80,40)$ بسرعة 60 كيلومتر/ ساعة غرباً متى تصبح السفينتان اقرب ما يمكن من بعضهما وكم المسافة بينهما عندئذ.

الحل:

بعد زمن قدره t تكون A قد قطعت مسافة = السرعة×الزمن = $50t$

وتكون إحداثياتها $A(40,10=50t)$

وفي نفس الوقت تكون B قد قطعت مسافة $60t$ غرباً وأصبحت إحداثياتها $B(80-60t,40)$ ويكون البعد بينهما:

$$D=\sqrt{(40-60t)^2+(30-50t)^2}$$

أي أن:

$$D^2=(40-60t)^2+(30-50t)^2$$

وبتفاضل D^2 بالنسبة لـــ t و وضعها مساوية للصفر نحصل على:

$$\frac{dD^2}{dt}=2(40-60t)(-60)+2(30-50t)(-50)=0$$

ومنها نحصل على:

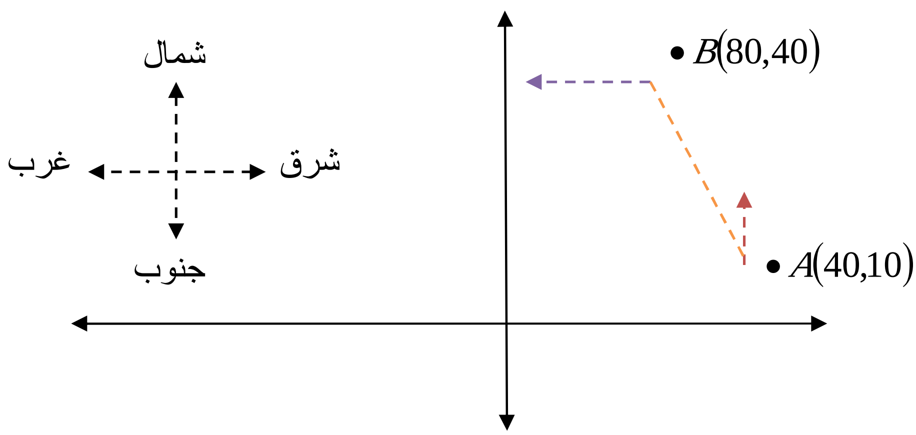
$$-6(4-6t)-5(4-5t)=0$$

$$61t=44$$

بذلك فإن الزمن $t=\frac{44}{61}$ ساعة

وبما أن $\frac{d^2D}{dt^2}=12200>0$

إذا النهاية صغرى ويكون $D^2=26.23$ أي أن $D\cong 5.13km$.



Summary

- The equation of the tangent line to the curve $y = f(x)$ at the point $p(x_1, y_1)$ is given by:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Where m is a slope of the tangent line at the point $p(x_1, y_1)$, that is $m = \frac{dy}{dx}$.

- The normal to the tangent line has the equation:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{m}$$

- Rolle's Theorem:
  Let $f(x)$ be continuous function on $[a, b]$, and differentiable on (a, b).
  If $f(a) = f(b) = 0$, then there exists at least one number $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = 0$.

- The mean value Theorem:
  If $f(x)$ is continuous function on $[a, b]$, and differentiable on (a, b), then there exists at least one number $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Theorem1:(L'Hopital rule $\frac{0}{0}$ form)
  Let $f(x)$ and $g(x)$ functions such that $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ and suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are differentiable on an open interval I containing a, and that $g'(x) \neq 0$, except possibly at a itself. Then:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Provided the second limit exists:

Theorem2:(L'Hopital rule $\frac{\infty}{\infty}$ form)

Let $f(x)$ and $g(x)$ functions such that $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ and suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are differentiable on an open interval I containing a, and that $g'(x) \neq 0$, except possibly at a itself. Then:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Provided the second limit exists:

Theorem3:(L'Hopital infinite limit)

Let $f(x)$ and $g(x)$ function such that $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ and suppose that $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ exists Then;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Provided the second limit exist:

Test for an Increasing or Decreasing function:

A differentiable function $f(x)$ is:

a) increasing on the interval (a,b) if $f'(x)>0$ for all $x\in(a,b)$.

b) decreasing on the interval (a,b) if $f'(x)<0$ for all $x\in(a,b)$.

Steps for finding where $f(x)$ is increasing and where decreasing:

Step$_1$: Find the derivative $f'(x)$

Step$_2$: Set up a table that solves the two inequalities:

$$f'(x)>0 \text{ and } f'(x)<0$$

Like that:

x	x	medal	x_0	medal	x_1	medal	b
f'		+	0	-	0	+	

First Derivative test:

Let $f(x)$ denote a differentiable function.Find $f'(x)$ and set up table to determine where $f(x)$ is increasing and where it is decreasing.

1- If $f(x)$ is increasing to the left of a point A on the graph of $f(x)$ and is decreasing to the right of A, then at the point A there is a local maximum.

2- If $f(x)$ is decreasing to the left of a point A on the graph of $f(x)$ and is increasing to the right of A, then at the point A there is a local minimum.

Steps for graphing function:

1- Find the domain of $f(x)$.

2- Locate the intercepts of $f(x)$.

3- Determine where $f(x)$ is increasing and where it is decreasing.
4- Find any local maxima or local minima.
5- Locate all points on the graph of $f(x)$ at which the tangent line is either horizontal or vertical.
6- Determine the end behavior and locate any a symptotes.

Concaring up ; concave Down:

Let $f(x)$ derote a function that is differentiable on the interval (a,b)

1- The graph of $f(x)$ is concring up words on (a,b) , if throughout (a,b) , the tangent lines to the graph of $f(x)$ lie bellow the graph.
2- The graph of $f(x)$ is concaring downwards on (a,b) , if throughout (a,b),the tangent lines to the graph of $f(x)$ lie above the graph.

Test for concavity:

Lat $y = f(x)$ be a function and let $f''(x)$ be its second derivative.

Inflection point:

An inflection point of a function $f(x)$ is a point on the graph of $f(x)$ at which the concavity of $f(x)$ changes.

Second Derivative Test:

Let $y = f(x)$ be a function that is differentiable on an open interval I and suppose that the second derivative $f''(x)$ exists on I.Also suppose C is a number in I for which $f(c) = 0$.

1- If $f''(x) < 0$, then at the point $(c,(f(c))$ there is a local maximum.
2- If $f''(x) > 0$, then at the point $(c,(f(c))$ there is a local minimum.
3- If $f''(x) = 0$, the test is inconclusive and the First Derivative Test must be used.

****

تمارين على الفصل الخامس

1- حدد الفترات على كل من الدوال التالية التي تكون فيها الدوال متزايدة أو متناقصة:

1: $f(x)=x^2-8x$ 2: $f(x)=2x^3-24x+5$

3: $f(x)=x^3+3x$ 4: $f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$

5: $f(x)=(x-1)^3(x-2)$ 6: $f(x)=(x-1)^3(x-2)$

2- أوجد القيم العظمى والصغرى للدوال في التمرين (1).

3- أوجد نقاط الانقلاب و ارسم الدوال التالية:

1: $f(x)=x^3+10x^2+25x+1$ 2: $f(x)=2x^6-6x^4$

3: $f(x)=\sqrt[3]{x}-1$ 4: $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$

5: $f(x)=8x^2-2x^4$ 6: $f(x)=3x^4-4x^3+2$

7: $f(x)=15x^5-25x^3$ 8: $f(x)=2-x^{\frac{2}{3}}$

4- أوجد عددين صحيحين مجموعهما 12 وحاصل ضربهما قيمة عظمى.

5- حاوية اسطوانية ذات قاعدة دائرية تتسع لـــــ64 متر مكعب أوجد أبعادها لكي يكون لها سطح اصغر ما يمكن.

6- مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 قدم ونصف قطر قاعدته r يتزايد، أوجد معدل تغير مساحة سطحه S بالنسبة لـــ r عندما $r=6$.

7- حوض مائي طوله 10 متر ومقطعة عبارة عن شبة منحرف متساوي الساقين قاعدته السفلى 3 متر والعليا 5 متر وارتفاعه 2 متر فإذا كان الماء يرتفع بمعدل $\frac{1}{48}$ متر دقيقة عندما كان عمق الماء مترا واحد أوجد معدل دخول الماء إلى الحوض.

8- أحسب قيم النهايات التالية:

1: $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x-\sin x}$ عندما $x \to 0$

$0 \leftarrow x$ عندما $f(x)=\dfrac{\sin x-x}{x^2}$:2

$0 \leftarrow x$ عندما $f(x)=\dfrac{\sin^{-1} x}{x}$:3

$\infty \leftarrow x$ عندما $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$:4

$\infty \leftarrow x$ عندما $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+2e^x)}$:5

$\overset{+}{0} \leftarrow x$ عندما $f(x)=x^2\ln x$:6

$\infty \leftarrow x$ عندما $f(x)=\dfrac{\ln(\ln x)}{lx}$:7

$\infty \leftarrow x$ عندما $f(x)=x^2e^x$:8

$0 \leftarrow x$ عندما $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$:9

$\overset{+}{0} \leftarrow x$ عندما $f(x)=(\cos 3x)^{\frac{5}{x}}$:10

$\overset{+}{0} \leftarrow x$ عندما $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$:11

$1 \leftarrow x$ عندما $f(x)=\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$:12

$\infty \leftarrow x$ عندما $f(x)=x\tan(\dfrac{1}{x})$:13

$0 \leftarrow x$ عندما $f(x)=(c\sec x-\cot x)$:14

****

الدوال الأصلية والتكامل Anti-Derivative and Integral

تابعنا في الفصول السابقة دراسة الدوال والعلاقات الهامة وكذلك حساب التفاضل وهو أحد الفرعين الأساسين التفاضل والتكامل وسنوجه اهتمامنا فيما يلي للفرع الأساسي الآخر للموضوع وهو حساب التكامل وتأخذ اليوم كلمة (تكامل) معنيين فيما يتعلق بحساب التكامل ويكاد المعنى الأكثر عمقاً يكون مماثلاً للتعريف غير الفني ((يبين الكل لـــ.....، يعطي جمع أو مجموع...)) (Webster).

ويكون المعنى الرياضي لهذه الكلمة ظاهر الوضوح في إيجاد المساحات المحددة بمنحنيات وأحجام المجسمات المختلفة، وأطوال المنحنيات ومراكز الثقل وتطبيقات أخرى.

أما المعنى الرياضي الثاني لفعل (يكامل) فهو إيجاد دالة أعطيت مشتقتها.

الدوال الأصلية: Anti-Derivative functions

تعريف :

ليكن I فترة غير خالٍ من R. ولتكن $f: I \to R$ دالة مستمرة نقول أن الدالة $F: I \to R$ دالة أصلية للدالة f إذا وفقط إذا كانت F قابلة للاشتقاق على الفترة Iوكان $F' = f$.

تعريف:

يقال إن $F(x)$دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية:

$$d\,F(x) = f(x)dx$$

أي أن بمعنى أن تفاضل الدالة $F(x)$ هو $f(x)dx$ أو أن المشتقة $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

ومن التعريف نجد أن الدوال $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري يمكن أن تكون كلها دوال أصلية (تكامل) للدالة $f(x)$ والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت تساوى صفر.

نستنتج انه إذا وجدت لدالة ما دالة أصيلة فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي :

تعريف:

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت وبحيث يكون:

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x}=f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز $\int f(x)\ d\,x=F(x)+c$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لدالة $f(x)$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

أمثلة:

حيث أن $d(x^5)=5x^4\ d\,x$ فإن: $\int 5x^4\ d\,x=x^5+c$

وبما أن $d(e^{3x})=3e^{3x}\ d\,x$ فإن: $\int 3\,e^{3x}\ d\,x=e^{3x}+c$

وبما أن $d(\cos x^2)=-2x\sin x^2\ d\,x$ فإن: $\int\left(2x\sin x^2\right)d\,x=\cos x^2+c$

وهذا يعنى أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل.

قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية(التكاملات الشائعة): Common Integrals

سنذكر العديد من القواعد الهامة لإيجاد تكامل الدوال الشائعة ((كثيرة الاستعمال)):

قاعدة 1: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدد ثابت عندئذ :

$\int a\,d\,x=ax+c$ حيث c ثابت التكامل.

أمثلة:

1) $\int 5\ d\ x=5\,x+c$

2) $\int -7\ d\ x=-7\,x+c$

3) $\int \frac{-5}{3}\ d\ x=\frac{-5}{3}\,x+c$

قاعدة 2 :

$\int x^n\ d\,x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ باستثناء $n=-1$ حيث c ثابت التكامل , $n\in R$.

أمثلة:

$$1)\ \int x^3\,dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+c=\frac{1}{4}x^4+c$$

$$2)\ \int \frac{1}{x^4}\,dx=\int x^{-4}\,dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+c=\frac{x^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{3x^3}+c$$

$$3)\ \int x^{\frac{2}{5}}\,dx=\frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{7}{5}}+c=\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}+c$$

قاعدة 3:

يمكن إخراج عامل ثابت من تحث إشارة التكامل أو إدخاله دون أن تتغير النتيجة

أي أن : $\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$

أمثلة :

$$1)\ \int 7x^4\,dx=7\int x^4=7\,\frac{x^{4+1}}{4+1}+c=\frac{7}{5}x^5+c$$

$$2)\ \int \frac{-2}{x^3}\,dx=-2\int x^{-3}\,dx=-2\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c=-2\,\frac{x^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{x^2}+c$$

$$3)\ \int \sqrt{5}\,x^{-\frac{2}{3}}\,dx=\sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx=3\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{3}}+c$$

قاعدة 4:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه الدوال أي أن:

إذا كانت $f(x)\,,g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن:

$$\int [\,f(x)+g(x)\,]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x)\,,f_2(x)\,,f_3(x)\,,..........,f_n(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن :

$$\int [\,f_1(x)\pm f_2(x)\pm ....\pm f_n(x)]\,dx=$$
$$\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx\pm ....\pm\int f_n(x)\,dx$$

أمثلة:

$$1)\ \int (x^2-2x+5)dx=\int x^2\,dx-2\int x\,dx+5\int dx=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+5x+c=\frac{x^3}{3}-x^2+5x+c$$

$$2)\ \int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int \sqrt{x}\,dx-2\int \frac{1}{x^3}\,dx=\int (x)^{\frac{1}{2}}\,dx-2\int x^{-3}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}-2\frac{x^{-3+1}}{-2}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{-2}+c$$

$$3)\ \int \left(x^5-\sqrt{2}\,x-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int x^5\,dx-\sqrt{2}\int x\,dx-3\int x^{-2}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}x^6-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+3x^{-1}+c$$

قاعدة 5:

لتكن u دالة في x و n عدد يخالف العدد(-1) عندئذ يكون:

$\int u^n\, u'\, dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ باستثناء $n=-1$ حيث c ثابت التكامل.

أمثلة :

$$1)\ \int (2x^3-6)^4(6x^2)\,dx$$

$$u=2x^3-6 \ \rightarrow\ u'=6x^2, \qquad n=4$$

$$\therefore \int (2x^3-6)^4(6x^2)\,dx=\int u^4\,u'\,dx=\frac{u^5}{5}+c=\frac{(2x^3-6)^5}{5}+c$$

$$2)\ \int (x^4-2)^5x^3\,dx$$

$$u=x^4-2 \ \rightarrow\ u'=4x^3$$

$$\therefore \int (x^4-2)^5(x^3)\,dx=\frac{1}{4}\int (x^4-2)^5(4x^3)\,dx=\frac{1}{4}.\frac{u^6}{6}+c=\frac{(x^4-2)^6}{24}+c$$

$$3)\ \int \sqrt{x^3+3x}\,(x^2+1)\,dx=\int (x^3+3x)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)\,dx$$

$$u=x^3+3x \ \rightarrow\ u'=3x^2+3=3(x^2+1)$$

$$\therefore \int \sqrt{x^3+3x}\,(x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}\int 3(x^3+3x)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)\,dx$$

$$\therefore \int \sqrt{x^3+3x}\,(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,u'\,dx = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(x^3+3x)^{\frac{3}{2}} + c$$

4) $\displaystyle \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^5} = \int 2x(1+x^2)^{-5}\,dx$

$$= \frac{(1+x^2)^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{-1}{4}\;\frac{1}{(1+x^2)^4} + c$$

5) $\displaystyle \int \cos^2 x \sin x\;dx = \int 2x(1+x^2)^{-5}\;dx$

$u = \cos x \;\rightarrow\; u' = -\sin x$

$$\int \cos^2 x \sin x\;dx = -\int u^2 u\,du = -\frac{u^3}{3} + c$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

6) $\displaystyle \int \frac{\ln x\,dx}{x}$

$u = \ln x \rightarrow \quad u' = \dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x} = \int uu'\,du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \left(2\sqrt{x}-3x^4\right)dx$

الحل:

$$\int \left(2\sqrt{x}-3x^4\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 3\int x^4\,dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\frac{x^5}{5} + c = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^5 + c$$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

الحل:

$$\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 3\int x^{-4}\,dx - 4\int x^2\,dx + 2\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= 3\frac{x^{-3}}{-3} - 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -x^{-3} - \frac{4}{3}x^3 + 4x^{\frac{1}{2}} + c$$

3) $\int \sqrt{x}\,(x-3)^2\,dx$

الحل:

$$\int \sqrt{x}\,(x-3)^2\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 6x + 9\right)dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 6x^{\frac{3}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{x}\left(\frac{2}{7}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 6x\right) + c$$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right) dx$

الحل:

$$\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right) dx = \int \left(x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}\right) dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{-3}}{-3}+c = -\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+c$$

5) $\int 3\left(3x^2-1\right)^3 x\, dx$

الحل:

$$\int 3\left(3x^2-1\right)^3 x\, dx$$

$$u = 3x^2-1 \;\rightarrow\; u' = 6x$$

$$\frac{1}{2}\int \left(3x^2-1\right)^3 (6x)\, dx = \frac{1}{8}\left(3x^2-1\right)^4 + c$$

6) $\int \left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right) dx$

الحل:

$$\int \left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right) dx$$

$$u = x^4+2x \;\rightarrow\; u' = 4x^3+2$$

$$\int \left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right) dx = \frac{1}{3}\left(x^4+2x\right)^3 + c$$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\; dx$

الحل:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\; dx = \int x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$u = x^2+1 \;\rightarrow\; u' = 2x$$

$$\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

8) $\int 5\left(5x^7+2\right)^2 x^6\, dx$

الحل:

$$\int 5\left(5x^7+2\right)^2 x^6\, dx$$

$$u=5x^7+2 \quad \rightarrow \quad u'=35x^6$$

$$\frac{1}{7}\int \left(5x^7+2\right)^2\left(35x^6\right)dx=\frac{1}{21}\left(5x^7+2\right)^3+c$$

9) $\int \left(\sqrt{1-4x}\right)dx$

الحل:

$$\int \left(\sqrt{1-4x}\right)dx=\int (1-4x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$u=1-4x \quad \rightarrow \quad u'=-4$$

$$\int (1-4x)^{\frac{1}{2}}\, dx=-\frac{1}{4}\int (-4)(1-4x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{1}{6}(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c$$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}\,\left(x^2\right)dx$

الحل:

$$\int \sqrt[3]{5+x^3}\,\left(x^2\right)dx=\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)dx$$

$$u=5+x^3 \quad \rightarrow \quad u'=3x^2$$

$$\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)dx=\frac{1}{3}\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(3x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}\left(5+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+c=\frac{1}{4}\left(5+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+c$$

11) $\int \frac{(1+3x)}{\sqrt{2x+3x^2}}\ dx$

الحل:

$$\int \frac{(1+3x)}{\sqrt{2x+3x^2}}\ dx = \int (1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$u = 2x+3x^2 \quad \rightarrow \quad u' = 2+6x = 2(1+3x)$$

$$\int (1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int 2(1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{1}\left(2x+3x^2\right)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2x+3x^2}$$

12) $\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)\ dx$

الحل:

$$\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)\ dx$$

$$u = \left(3x-x^3\right) \quad \rightarrow \quad u' = 3-3x^2 = 3\left(1-x^2\right)$$

$$\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)\ dx = \frac{1}{3}\int \left(3x-x^3\right)^5(3)\left(1-x^2\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{6}\left(3x-x^3\right)^6 + c = \frac{1}{18}\left(3x-x^3\right)^6 + c$$

13) $\int 3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx$

الحل:

$$\int 3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx$$

$$u = \left(3-x^3\right) \quad \rightarrow \quad u' = 3x^2 dx$$

$$\int 3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx = -\int -3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx = \frac{1}{7}\left(3-x^3\right)^7 + c$$

تكامل الدوال المثلثية Trig functions Integrals

قواعد التكامل:

a. بتطبيق التعريف الأساسي لحساب التكامل المعرف في بداية الفصل و باعتبار الدالة المعاكسة للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية :

تكامل دالة الجيب تكون بالشكل التالي:

$$1)\ \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

أما إذا كانت الزاوية دالة في x فإن القانون السابق يكون كالتالي:

$$2)\ \int u' \sin u\, dx = -\cos u + c$$

تكامل دالة جيب التمام تكون بالشكل التالي:

$$3)\ \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

أما إذا كانت الزاوية دالة في x فإن القانون السابق يكون كالتالي:

$$4)\ \int u' \cos u\, dx = \sin u + c$$

تكامل دالة الظل تكون بالشكل التالي:

$$\int \tan x\, dx = \ln\left|\sec x\right| + c$$

أما إذا كانت الزاوية دالة في x فإن القانون السابق يكون كالتالي:

$$\int u' \tan u\, dx = \ln\left|\sec u\right| + c$$

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\ \int \sin 4x\, dx = \frac{1}{4}\int 4\sin 4x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + c$$

$$2)\ \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$3)\ \int \left(\sin(3x+2) + \cos(2-3x)\right) dx = \int \sin(3x+2)\, dx + \int \cos(2-3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sin(3x+2)\, dx - \frac{1}{3}\int -3\cos(2-3x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) - \frac{1}{3}\sin(2-3x) + c$$

4) $\int \frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$

$$u = 2-\sqrt{x} \quad \to \quad u' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = 3(-2)\int \frac{-1}{2}.\frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= -6\int u'\sin u\, du$$

$$= 6\cos u + c$$

$$= 6\cos\left(2-\sqrt{x}\right) + c$$

b. بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل بالاعتماد على القوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية :

قاعدة 1 : تكامل الدالة $y = \sec^2 x$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية:

$$\int u'\sec^2 u\, dx = \tan u + c$$

قاعدة 2 : تكامل الدالة $y = \csc^2 x$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية :

$$\int u'\csc^2 u\, dx = -\cot u + c$$

قاعدة 3 : تكامل الدالة $y = \sec x \tan x$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية :

$$\int u'\sec u \tan u\, dx = \sec u + c$$

قاعدة 4 : تكامل الدالة $y = \csc x \cot x$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc u + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية :

$$\int u'\csc u \cot u\, dx = -\csc u + c$$

قاعدة 5 :تكامل الدالة $y=\cot x$

$$\int \cot x\,dx=-\ln|\csc x|+c$$

إذا كانت u دالة في xفيكون لدينا :

$$\int u'\cot u\,dx=-\ln|\csc u|+c$$

قاعدة 6 :تكامل الدالة $y=\sec x$

$$\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

إذا كانت u دالة في xفيكون لدينا :

$$\int u'\sec u\,dx=\ln|\sec u+\tan u|+c$$

قاعدة 7 :تكامل الدالة $y=\csc x$

$$\int \csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+c$$

إذا كانت u دالة في xفيكون لدينا :

$$\int u'\csc u\,dx=\ln|\csc u-\cot u|+c$$

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

1) $\int x\tan(2x^2+1)\,dx=\frac{1}{4}\int 4x\tan(2x^2+1)\,dx=\frac{1}{4}\ln|\sec(2x^2+1)|+c$

2) $\int \sec^2(4x)\,dx=\frac{1}{4}\int 4\sec^2(4x)\,dx=\frac{1}{4}\tan(4x)+c$

3) $\int x^2\sec(5x^3+a)dx$ حيث a عدد ثابت

$$u=5x^3+a \quad\rightarrow\quad u'=15x^2$$

$$\int x^2\sec(5x^3+a)\,dx=\frac{1}{15}\int 15\,x^2\sec(5x^3+a)\,dx$$

$$=\frac{1}{15}\ln|\sec(5x^3+a)+\tan(5x^3+a)|+c$$

4) $\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}\,dx$

$$u=2+3\ln x \quad\rightarrow\quad u'=\frac{3}{x}$$

$$\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{3}{x}\csc(2+3\ln x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\csc(2+3\ln x)-\cot(2+3\ln x)|+c$$

5) $\int 2x\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\,dx=$

$u=x^2+1 \to u'=2x$

$\int 2x\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\,dx=$

$=-\csc(x^2+1)+c$

6) $\int (3x^2+2x+1)\sec(x^3+x^2+x)\tan(x^3+x^2+x)\,dx=$

$u=x^3+x^2+x \to u'=3x^2+2x+1$

$\int (3x^2+2x+1)\sec(x^3+x^2+x)\tan(x^3+x^2+x)\,dx=$

$=\sec(x^3+x^2+x)+c$

7) $\int (2x+7)\tan(x^2+7x)\,dx=$

$u=x^2+7x \to u'=2x+7$

$\int \tan uu'\,dx=$

$=\sec^2(u)+c$

$=\sec^2(x^2+7x)+c$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int x^2 \csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right) dx$.

الحل: $\int x^2 \csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right) dx = -\int -x^2 \csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right) dx = \cot\left(3-\frac{x^3}{3}\right)+c$

2) $\int x^2 \csc\left(2x^3\right)\cot\left(2x^3\right) dx$.

الحل:

$$\int x^2 \csc\left(2x^3\right)\cot\left(2x^3\right) dx = \frac{1}{6}\int 6x^2 \csc\left(2x^3\right)\cot\left(2x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\csc 2x^3\right)+c = -\frac{1}{6}\csc 2x^3 + c$$

3) $\int 5-4x^{-\frac{1}{2}} dx$.

الحل : $\int 5-4x^{-\frac{1}{2}} dx = 5x-4\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)+c$

4) $\int \frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}} dx$.

الحل:

$$\int \frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{x^3}}\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{2}\int \tan u \, du = \frac{1}{2}\ln\left|\sec u\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sec\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\right| + c$$

5) $\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right) dx$.

الحل:

$$\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right) dx = -2\int \frac{-1}{2}\cot\left(7-\frac{x}{2}\right) dx = 2\ln\left|\csc\left(7-\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

6) $\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}\, dx$$

$$u = 3+5\ln 9x \quad \rightarrow \quad u' = \frac{5}{x}$$

$$\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}\, dx = \frac{1}{5}.\frac{1}{7}\int \frac{5}{x}\cos(3+5\ln 9x)\, dx$$

$$= \frac{1}{35}\int u'\cos u\, du = \frac{1}{35}\sin u + c = \frac{1}{35}\sin(3+5\ln 9x) + c$$

7) $\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx$.

الحل:

$$\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx$$

$$u = 9+4\sin 6x \quad \rightarrow \quad du = 24\cos 6x\, dx$$

$$\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx = \frac{1}{24}\int 24\cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{24}\sin(9+4\sin 6x) + c$$

8) $\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 \ dx$.

الحل:

$$\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 \ dx = \int \left(\cos^2 3x - 2\cos 3x \sin 3x + \sin^2 3x\right) dx$$
$$= \int (1 - 2\cos 3x \sin 3x)\, dx = \int dx - 2\int \cos 3x \sin 3x \ dx$$
$$\because \int \cos 3x \sin 3x \ dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x \sin 3x \ dx = \frac{1}{3}\sin^2 3x + c$$
$$\therefore \int (\cos 3x - \sin 3x)^2 \ dx = x - \frac{1}{3}\sin^2 3x + c$$

9) $\int \cot x \, dx$.

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = -\ln|\sin x| + c = -\ln|\sin^{-1} x| + c = -\ln|\csc x| + c$$
$$\therefore \int \cot x \, dx = -\ln|\csc x| + c$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية Trig function Integrals Inverse

سنورد في هذا البند بعض قواعد تكامل الدوال المثلثية العكسية التي سابق دراستها.

قاعدة 1:

لتكن u دالة في x عندئذ يكون:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c \quad \text{و} \quad \int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

حيث c ثابت التكامل.

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

$$2)\int \frac{2xdx}{\sqrt{16-(x+1)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{4}\right)+c$$

$$3)\int \frac{-dx}{\sqrt{49+x^2}} = \frac{1}{7}\cos^{-1}\left(\frac{x}{7}\right)+c$$

قاعدة 2:

لتكن u دالة في x عندئذ يكون:

$$\int \frac{-du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c \quad \text{و} \quad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

حيث c ثابت التكامل.

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

$$2)\int \frac{2xdx}{16+x^4} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$3)\int \frac{dx}{25+(x+1)^2} = \frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{5}\right)+c$$

تكامل الدوال الآسية اللوغارثمية: Exponential and Logarithm Integrals

قواعد التكامل:

القاعدة 1:

إذا كان a عددا موجبا يخالف 1, $(a \neq 1)$ فإنه يكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

وبصورة عامة إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int u' \, a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\int 3^x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$2)\int 5^{-3x} \, dx = \frac{-1}{3}\int (-3)\, 5^{-3x} \, dx = \frac{-1}{3}.\frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c$$

$$3)\int x6^{2x^2} \, dx = \frac{1}{4}\int 4x\, 6^{2x^2} \, dx = \frac{1}{4}.\frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$$

القاعدة 2:

إذا كان $a = e$ فيكون لدينا ما يلي:

$\int e^x \, dx = \frac{e^x}{\ln e} + c$ لكن $\ln e = 1$ وبالتالي يكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

وبصورة عامة إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int u' \, e^u \, dx = e^u + c$$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} \, dx$

الحل:

$$u = x^2 - 2x + 1 \quad \rightarrow \quad u' = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\therefore \quad \int (x-1)\ e^{x^2-2x+1}\ dx = \frac{1}{2}\int 2\,(x-1)\ e^{x^2-2x+1}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u' e^{u}\ dx = \frac{1}{2}e^{u} + c = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+1} + c$$

مثال:

احسب التكامل التالي: $\int \left(\cos x - 1\right)e^{\sin x - x}\ dx$

الحل:

لدينا $u = \sin x - x \quad \rightarrow \quad u' = \cos x - 1$

وبالتالي فإن:

$$\int \left(\cos x - 1\right)e^{\sin x - x}\ dx = \int u' e^{u}\ dx = e^{u} + c = e^{\sin x - x} + c$$

القاعدة 3:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القاعدة التالي :

$$\int \frac{u'}{u}\ dx = \ln|\ u\ | + c$$

مثال: احسب التكامل التالي : $\int \frac{e^x}{e^x - 2}\ dx$.

الحل:

لدينا $u = e^x - 2 \quad \rightarrow \quad u' = e^x$

وبالتالي فإن : $\int \frac{e^x}{e^x - 2}\ dx = \int \frac{u'}{u}\ dx = \ln|\ u\ | + c = \ln|\ e^x - 2\ | + c$

مثال: احسب التكامل التالي : $\int \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x}\ dx$.

الحل:

لدينا $u = x^4 + 2x \quad \rightarrow \quad u' = 4x^3 + 2 = 2(2x^3 + 1)$

وبالتالي فإن :

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^4+2x| + c$$

مثال: احسب التكامل التالي: $\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$.

الحل:

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$$
$$u = x^2+\sin 2x \quad \rightarrow \quad u' = 2x + 2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$$
$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \ln|x^2+\sin 2x| + c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \left(e^{-x}+\cos 2x+1\right) dx$.

الحل:

$$\int \left(e^{-x}+\cos 2x+1\right) dx=-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin 2x+x+c$$

2) $\int 2\,e^{2x+\cos x}\left(2-\sin x\right) dx$.

الحل:

$$\int 2\,e^{2x+\cos x}\left(2-\sin x\right) dx$$

$$u=2x+\cos x \quad \to \quad du=(2-\sin x)\,dx$$

$$\int 2\,e^{2x+\cos x}\left(2-\sin x\right) dx=\int 2\,e^{u}\,du=2\,e^{u}+c=2\,e^{2x+\cos x}+c$$

3) $\int \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}+1}}\,dx=\int e^{x}\left(e^{x}+1\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}+1}}\,dx=\int e^{x}\left(e^{x}+1\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$u=e^{x}+1 \quad \to \quad du=e^{x}\,dx$$

$$\int e^{x}\left(e^{x}+1\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx=\int u^{\frac{-1}{2}}\,du=2\,u^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=2(e^{x}+1)^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{e^{x}+1}+c$$

4) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \int x^{-2} e^{x^{-1}}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \int x^{-2} e^{x^{-1}}\, dx$$

$$u = x^{-1} \quad \to d\,u = -x^{-2} dx$$

$$\int x^{-2} e^{x^{-1}}\, d\,x = -\int - x^{-2} e^{x^{-1}} dx$$

$$= -\int e^{u}\, d\,u = -e^{u} + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

5) $\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}}\, d\,x$.

الحل:

$$\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}}\, d\,x$$

$$u = 5 - 3^{2x} \quad \to \quad d\,u = -2\; 3^{2x} \ln 3\; d\,x \quad \to \quad 3^{2x}\, d\,x = -\frac{1}{2\ln 3}\, d\,u$$

$$\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}}\, d\,x = -\frac{1}{2\ln 3}\int e^{u}\, d\,u = -\frac{1}{2\ln 3} e^{5-3^{2x}} + c$$

6) $\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t\, d\,t$.

الحل:

$$\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t\, d\,t$$

$$u = 1 + \cot 5t \quad \to \quad d\,u = -5\csc^2 5t\, d\,t \quad \to \quad \csc^2 5t\, d\,t = -\frac{1}{5}\, d\,u$$

$$\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t\, d\,t = -\frac{1}{5}\int 2^{u}\, d\,u = -\frac{1}{5\ln 2} 2^{u} + c = -\frac{1}{5\ln 2} 2^{1+\cot 5t} + c$$

7) $\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, e^{5-2x^{-2}}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, e^{5-2x^{-2}}\, dx$$

$$u = 5-2x^{-2} \quad \rightarrow \quad du = 4x^{-3}\, dx \quad \rightarrow \quad x^{-3}\, dx = \frac{1}{4}\, du$$

$$\int x^{-3}\, e^{5-2x^{-2}}\, dx = \frac{1}{4}\int e^{u} du = \frac{1}{4}e^{u} + c = \frac{1}{4}e^{5-2x^{-2}} + c$$

8) $\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x}\, dx = \int x^{-1}\, e^{3}e^{\ln 2x}\, dx$$

$$= \int x^{-1}e^{3}(2x)\, dx = 2e^{3}\int dx = 2xe^{3} + c$$

9) $\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7\, dx$.

الحل:

$$\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7\, dx$$

$$u = e^{x^2}+1 \quad \rightarrow \quad du = 2xe^{x^2}\, dx \quad \rightarrow xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, du$$

$$\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7\, dx = \frac{1}{2}\int u^{7}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}\left(e^{x^2}+1\right)^8 + c$$

10) $\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx$.

الحل:

$$\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx$$

$$u=e^{2x}-1 \quad \rightarrow \quad du=2e^{2x}\,dx \quad \rightarrow e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx=\frac{1}{2}\int \sec u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan u+\sec u\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(e^{2x}-1\right)+\sec\left(e^{2x}-1\right)\right|+c$$

11) $\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}\,dx$.

الحل:

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}\,dx$$

$$u=e^{2x^2}+5 \quad \rightarrow \quad du=4xe^{2x^2}\,dx \quad \rightarrow xe^{2x^2}\,dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\ln\left|u\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right|+c$$

12) $\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx$.

الحل:

$$\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx$$

$$u=\sin 2x+\cos 2x \quad \rightarrow \quad u'=2\cos 2x-2\sin 2x=2(\cos 2x-\sin 2x)$$

$$\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(\cos 2x-\sin 2x)}{\sin 2x+\cos 2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{u'}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln\left|u\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x+\cos 2x\right|+c$$

13) $\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx$$

$$u = 5-\tan x \quad \to \quad u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx = -\int \frac{u'}{u}\, dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

التكامل بالتعويض: Substitution Integral

ليكن لدينا الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ عندئذ يمكن تركيب الدالة $f\circ g(x)=f\big(g(x)\big)$ وبفرض أن $g(x)=u$ تصبح لدينا الدالة $f(u)$ فإذا كانت $f(u)$ قابلة للمكاملة يكون التركيب $f\circ g(x)=f\big(g(x)\big)$ قابل للمكاملة، وسنميز حالتين :

الحالة الأولى:

التكامل بالتعويض وفق قاعدة السلسلة :

في هذه الحالة نحاول الوصول إلى الشكل $\int f(u)\ du$ من خلال إجراء تغير في المتحول سنشرحه بالأمثلة التالية:

1) $\int (x^2+5x+2)(2x+5)\ dx$

نفرض أن : $u=x^2+5x+2$ نفاضل الطرفين نحصل على $du=(2x+5)dx$ ثم نعوض عن u ومشتقاتها بذلك يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int u\quad du=\frac{u^2}{2}+C$$

نعوض عن u بما تساويه فنجد:

$$\int (x^2+5x+2)(2x+5)\ dx=\frac{(x^2+5x+2)^2}{2}+C$$

2) $\int 2x\ e^{x^2}\ dx$

نفرض أن : $u=x^2$ نفاضل الطرفين نحصل على $du=2xdx$ ثم نعوض عن u ومشتقاتها بذلك يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int e^u\quad du=e^u+C$$

نعوض عن u بما تساويه فنجد:

$$\int 2x\ e^{x^2}\ dx=e^{x^2}+C$$

الحالة الثانية:

طريقة التعويض في الدوال المثلثية:

إذا حوي التكامل أي من الجذور التالية نتبع طريقة التعويض الموضحة جانب كل جذر:

$$1-\quad \sqrt{a^2-b^2x^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \end{cases}$$

$$2-\quad \sqrt{b^2x^2-a^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}\sec\theta \\ \tan^2\theta=\sec^2\theta-1 \end{cases}$$

$$3-\quad \sqrt{a^2+b^2x^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}\tan\theta \\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta \end{cases}$$

أمثلة:

أحسب التكاملات التالية:

$$1)\int \frac{16dx}{x^2\sqrt{4-9x^2}}$$

نفرض أن : $x=\frac{2}{3}\sin\theta$ بتفاضل الطرفين نحصل على $dx=\frac{2}{3}\cos\theta\ d\theta$ منها نعوض في الجذر نحصل على

$$\sqrt{4-9x^2}=\sqrt{4-\sin^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2|\cos\theta|$$

ملاحظة:

إذا كان لدينا تكامل محدود يجب أن نضع إشارة القيمة المطلقة، ولكن هنا يمكن التغاضي عنها وسنضع $|\cos\theta|=\cos\theta$ فيكون لدينا:

$$\int \frac{16}{\frac{4}{9}\sin\theta^2(2\cos\theta)}\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta=$$

$$=\int\frac{12\quad d\theta}{\sin^2\theta}=12\int\csc^2\theta\quad d\theta=-12\cot\theta+C$$

$$2)\int \sqrt{9-4x^2}\ \ dx$$

نفرض أن : $x=\frac{3}{2}\sin\theta$ بتفاضل الطرفين نحصل على $dx=\frac{3}{2}\cos\theta\ d\theta$ منها نعوض في الجذر نحصل على:

$$\int \sqrt{9-4\left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)^2}\ \frac{3}{2}\cos\theta\ d\theta = \int\sqrt{9-9\sin^2\theta}\ \frac{3}{2}\cos\theta\ d\theta$$

$$= \int 3\cos\theta\ \frac{3}{2}\cos\theta\ d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int\cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+C$$

لكن $\theta = \frac{3}{2}\sin^{-1}x$ و $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ منها

$$\sin 2\theta = 2\left(\frac{2}{3}x\right)\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\int \sqrt{9-4x^2}\ dx = \frac{2}{3}\sin^{-1}x+\frac{4}{9}x\sqrt{9-4x^2}+C$$

تكامل بعض الصيغ المثلثية : Products of Trig functions

يكون التكامل في هذه الحالة على حسب درجة الدوال المثلثية :

أولاً: لحساب التكامل $\int \sin^n x\cos^m x\ dx$ **نميز بين الحالات التالية:**

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من sin ونحول الباقي إلى cos من خلال العلاقة $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ ثم نجري التكامل بالتعويض بفرض أن $u=\cos x$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \sin^3 x\cos^4 x\ dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \sin^3 x\cos^4 x\ dx = \int \sin x\sin^2 x\cos^4 x\ dx$$

$$= \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^4 x\ dx$$

نفرض أن $u=\cos x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=-\sin x\ dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \sin^3 x\cos^4 x \; dx = -\int \left(1-u^2\right)u^4 \; du = -\int \left(u^4 - u^6\right) \; du$$
$$= \frac{-u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$
$$= \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

2- إذا كان m فردياً: نترك واحد من cos ونحول الباقي إلى sin من خلال العلاقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ وبعدها نجري التكامل بالتعويض مفترضين أن $\sin x = u$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \cos^3 x\sin^2 x \; dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \cos^3 x\sin^2 x \; dx = \int \cos x\cos^2 x\sin^2 x \; dx$$
$$= \int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x \; dx$$

نفرض أن $u = \sin x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du = \cos x \; dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \left(1-u^2\right)u^2 \; du = -\int \left(u^2 - u^4\right)du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

3- إذا كان n و m فرديان : في هذه الحالة يمكن استخدام البند 1 أو 2 لإجراء الحساب.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \cos^5 x\sin^3 x \; dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \cos^5 x\sin^3 x \; dx = \int \cos x\cos^4 x\sin^3 x \; dx$$
$$= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^3 x\cos x \, dx$$

نفرض أن $u = \sin x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du = \cos x \; dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \left(1-u^2\right)^2 u^3 \ \ du = \int \left(1-2u^2+u^4\right)u^3 \ \ du = \int \left(u^3-2u^5+u^7\right) \ du$$

$$= \frac{u^4}{4} - 2u^5 + u^7 + C$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} + \frac{1}{3}\sin^6 x + \frac{\sin^8 x}{8} + C$$

4- إذا كان n و m زوجيان عندها نستخدم قوانين ضعف الزاوية لإعادة التكامل إلى شكل يمكن فيه إجراء المكاملة وصيغ ضعف الزاوية هي :

$1)\ \ \sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $2)\ \ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ و $3)\ \ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \times \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)\left(1+\cos 2x\right) \ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) \ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \ \ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\int \ dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x \ \ dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

ثانياً: إذا كان لدينا التكامل: $\int \tan^n x \sec^m x \ \ dx$ نميز الحالات التالية:

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من $\tan$ و واحده من $\sec$ ونحول الباقي إلى $\sec$ باستخدام العلاقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ وبعدها نفرض $u = \sec x$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \tan^3 x\sec^5 x \; dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \tan^3 x\sec^5 x \; dx = \int \tan^2 x\sec^4 x\tan x\sec x \; dx$$
$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\sec^4 x\tan x\sec x \; dx$$

نفرض أن $u = \sec x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du = \tan x\sec x \; dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \left(u^2 - 1\right)u^4 \; du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C$$
$$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$$

2- إذا كان m زوجي: نترك اثنان من $\sec^2 x\sec x$ ونحول الباقي إلى $\tan$ من خلال العلاقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التحويل $u = \tan x$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \tan^2 x\sec^4 x \; dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \tan^2 x\sec^2 x\sec^2 x \; dx = \int \cos x\cos^2 x\sin^2 x \; dx$$

نفرض أن $u = \tan x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du = \sec^2 x \; dx$

عندها يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int u^2\left(1 + u^2\right) \; du = \int \left(u^2 + u^4\right) \; du$$
$$= \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$$

3- إذا كان n فردياً و m زوجياً عندها يمكن استخدام أي من البندين 1 أو 2 لإيجاد التكامل.

4- إذا كان n زوجياً و m فردياً عندها كل تكامل سوف يحل بطريقة مختلفة ولا توجد قاعدة عامة.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\, dx$.

الحل:

باستخدام القواعد السابقة نحصل على:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin^4 x \sin x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \sin x}{\cos^3 x}\, dx$$

نفرض أن $u=\cos x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=-\sin x\ dx$

عندها يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\, dx = -\int \frac{(1-u^2)^2}{u^3}\, du = -\int \frac{(1-2u^2+u^4)}{u^3}\, du$$

$$= -\int \frac{du}{u^3} + 2\int \frac{du}{u} - \int u \ \ du$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2 x + 2Ln|\cos x| - \frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \tan^5 x \sec^4 x\ dx$.

الحل:

باستخدام القواعد السابقة نحصل على:

$$\int \tan^5 x \sec^4 x\ dx = \int \tan^4 x \sec^3 x \tan x \sec x\ dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 x \sec^3 x \tan x \sec x\ dx$$

نفرض أن $u=\sec x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=\sec x \tan x\ dx$

عندها يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int \left(u^2-1\right)^2 u^3 \; du = \int \left(u^4-2u^2+1\right)u^3 \; du$$
$$= \int \left(u^7-2u^5+u^3\right) \; du$$
$$= \frac{u^8}{8} - \frac{2u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{\sec^8 x}{8} - \frac{2\sec^6 x}{6} + \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \sin^5 x \cos^2 x \; dx$ ؟

الحل:

باستخدام القواعد السابقة نحصل على:

$$\sin^5 x = \sin x \sin^4 x = \sin x (\sin^2 x)^2$$
$$= \sin x (1-\cos^2 x)^2$$

نفرض $u = \cos x$ بتعويض في التكامل نحصل على :

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \; dx = \int (1-u^2)^2 \; u^2 \; du$$
$$= \int (1-2u^2+u^4)u^2 \; du$$
$$= \int (u^2-2u^4-u^6) \; du = \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$
$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

التكامل بالتجزيء Integration by parts

من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين نجد: $d(uv) = v\,du + u\,dv$

بتكامل الطرفين نحصل على العلاقة : $uv = \int v\,du + \int u\,dv$

ومنها نحصل على قانون التكامل بالتجزيء:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int u\,dv$ إلى حساب التكامل $\int v\,du$ الذي يكون عادة اقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u و dv .

وطريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال:

نفرض أننا نريد حساب $\int x\sin x\,dx$ لكن لا يمكن حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزيء.

ولنفرض $u = x \;\rightarrow\; du = dx$

$$dv = \sin x\,dx \;\rightarrow\; v = -\cos x$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

مثال:

احسب ما يلي : $\int x e^x\,dx$.

الحل:

نلاحظ:أننا لا نستطيع إيجاد تكامل هذه الدالة مباشرة فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزيء.

لنفرض أن $u = x \;\rightarrow\; du = dx$

$$dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \frac{x^2}{2}$$

ومنه فإن $\int x e^x \, dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x \, dx$

ولكن التكامل $\int \frac{x^2}{2} e^x \, dx$ ليس من التكاملات التي يمكن أن نستخدم فيها احد قوانين التكامل المباشر وذلك بسبب اختيار u , dv اختيار خاطئا أو غير موفق، إذا نحاول إيجاد اختيار أخر نفرضه لـــ u , dv

ولنأخذ $u = x \;\rightarrow\; du = dx$ و $dv = e^x \, dx \;\rightarrow\; v = e^x$

نطبق القانون : $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

ومنه $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + c = e^x (x-1) + c$

إذا الاختيار الذي تم في المثال صحيح.

مثال:

اوجد تكامل $\int \ln x \, dx$.

الحل:

نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x \, dx$

ففي هذا المثال يمكن حساب التكامل باستعمال طريقة التعويض المذكورة سابقاً وبأخذ

$z = \ln x$

وبالتالي $z = \ln x \;\rightarrow\; e^z = x \;\rightarrow\; d e^z = dx$

لدينا $\frac{d e^z}{dz} = e^z \;\rightarrow\; d e^z = e^z \, dz$

ومنه $dx = e^z \, dz$

إذا التكامل السابق يصبح $\int \ln x \, dx = \int z \, d e^z = \int z e^z \, dz$

وحسب المثال السابق :

$$\int z e^z \, dz == e^z (z-1) + c$$

وبالتالي فإن $\int \ln x \, dx = e^{\ln x} (\ln x - 1) + c = x(\ln x - 1) + c$

ويمكن حسابه مباشرة باستعمال التكامل بالتجزيء

ولنأخذ $u=\ln x \quad \to \quad du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx \quad \to \quad v=x$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

فيكون لدينا:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x-\int dx$$
$$= x\ln x - x + c = x(\ln x-1)+c$$

مثال:

اوجد تكامل $\int \sin^2 x\,dx$.

الحل:

لنفرض ما يلي :

$$u=\sin x \quad \to \quad du=\cos x\,dx$$
$$dv=\sin x\,dx \quad \to \quad v=-\cos x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ يكون لدينا :

$$\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x\,dx$$
$$\because \quad \sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad \to \quad \cos^2 x=1-\sin^2 x$$
$$\therefore \quad \int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int \left(1-\sin^2 x\right)dx=-\sin x\cos x+\int dx-\int \sin^2 x\,dx$$
$$\to \quad \int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+x-\int \sin^2 x\,dx$$
$$\to \quad \int \sin^2 x\,dx+\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+x+c$$
$$\to \quad 2\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+x+c$$
$$\therefore \quad \int \sin^2 x\,dx=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x+c=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+c$$

– هناك طريقة ثانية لحل هذا المثال من خلال استخدام صيغة ضعف الزاوية: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + C$$

وهي النتيجة ذاتها التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بالتجزيء.

ملاحظة:

كما هو واضح أن طريقة التكامل بالتجزئة تنقلنا من حساب تكامل صعب إلى تكامل ابسط لكن هذا يتوقف بصورة أدق عن اختيار $u\,,\,d\,v$ لذلك سنقدم بعض حالات الاختيار المناسب، حالات اختيار $u\,,\,v$.

الحالة الأولى:

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n\, e^{ax}\, d\,x$

نفرض $u = x^n \;\rightarrow\; d\,u = nx^{n-1}\, d\,x$

ونفرض $d\,v = e^{ax}\, d\,x \;\rightarrow\; v = \frac{1}{a}\, e^{ax}$

مثال:

احسب ما يلي : $\int x^2\, e^x\, d\,x$.

الحل:

لنفرض ما يلي :

$$u = x^2 \;\rightarrow\; d\,u = 2x\,d\,x$$
$$d\,v = e^x\, d\,x \;\rightarrow\; v = e^x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء $\int u\,d\,v = u\,v - \int v\,d\,u$ يكون لدينا :

$$\int x^2\, e^x\, d\,x = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx$$

ولكن وجدنا في المثال السابق أن $\int x\,e^x\, d\,x = e^x(x-1) + c$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\int x^2\, e^x\, d\,x = x^2 e^x - 2\left[e^x(x-1)\right] + C$$

الحالة الثانية:

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n \cos\omega x\, dx$ أو من الشكل $\int x^n \sin\omega x\, dx$

نفرض $u = x^n \rightarrow du = nx^{n-1}\, dx$

ونفرض للشكل الأول $dv = \cos\omega x\, dx \rightarrow v = \frac{1}{\omega}\sin\omega x$

ونفرض للشكل الثاني $dv = \sin\omega x dx \rightarrow v = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x$

مثال:

احسب التكامل $\int x\cos x\, dx$.

الحل:

نفرض أن :
$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = \cos x\, dx \rightarrow v = \sin x$$

وحسب قانون التكامل بالتجزيء فإن :

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$
$$= x\sin x + \cos x + c$$

الحالة الثالثة:

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n \ln x\, dx$

في هذه الحالة نفرض $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ونفرض $dv = x^n\, dx \rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

مثال:

احسب التكامل : $\int x^2 \ln x\, dx$.

الحل:

نفرض $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ ولنفرض $dv = x^2\, dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء فإن :

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

الحالة الرابعة:

إذا كان لدينا التكامل من الشكل $\int e^{ax}\sin\omega x\,dx$ أو من الشكل $\int e^{ax}\cos\omega x\,dx$

نفرض $u=e^{ax} \rightarrow du=ae^{ax}\,dx$

ونفرض للشكل الأول $dv=\sin\omega x\,dx \rightarrow v=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x$

ونفرض للشكل الثاني $dv=\cos\omega x\,dx \rightarrow v=\frac{1}{\omega}\sin\omega x$

مثال:

احسب التكامل $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

الحل:

نفرض أن:

$$u=e^{3x} \rightarrow du=3e^{3x}dx$$

$$dv=\sin 2x\,dx \rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

وبالتالي فإن :

$$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{3x}+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

نضع $I=-\frac{e^{3x}}{2}\cos x\,e^{3x}+\frac{3}{2}I_1$

نحسب الآن $I_1=\int\cos x\,e^{3x}\,dx$ ونحسب مرة أخرى التكامل بالتجزيء

نفرض أن

$$u=e^{3x} \rightarrow du=3e^{3x}dx$$

$$dv=\cos 2x\,dx \rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x$$

ومنه فإن : $I_1=\int\cos x\,e^{3x}\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{3x}-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx$

نرجع ونعوض في التكامل الأصلي I

$$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{3x}+\frac{3}{4}\sin 2x\,e^{3x}-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx$$

$$\rightarrow \int e^{3x}\sin 2x\,dx+\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx=e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{13}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$\rightarrow \quad \int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{4}{13}e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

إذا التكامل المطلوب حسابه يعطى بما يلي:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{e^{3x}}{13}\left(-2\cos x + 3\sin 2x\right)$$

مثال:

احسب التكامل $\int x^3 \sin(2x^2)\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2x\,dx$

ونفرض أن $dv = x\sin(2x^2)\,dx \quad \rightarrow \quad v = -\frac{1}{4}\cos(2x^2)$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^3 \sin(2x^2)\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2) + \frac{1}{2}\int x\cos(2x^2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2) + \frac{1}{8}\sin(2x^2) + c$$

مثال:

احسب التكامل: $\int x\sec x\tan x\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$

ونفرض أن $dv = \sec x\tan x\,dx \quad \rightarrow \quad v = \sec x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\sec x\tan x\,dx = x\sec x - \int \sec x\,dx$$

$$= x\sec x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos x^2 \, dx$.

الحل:

لدينا $\int \cos x^2 \, dx = \int \cos x \cos x \, dx$

نفرض أن $u = \cos x \rightarrow du = -\sin x \, dx$

نفرض أن $dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \sin x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على:

$$\int \cos x^2 \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$
$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

ومنه فإن $\int \cos x^2 \, dx = \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx$

$$\rightarrow \quad 2\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x + c$$
$$\rightarrow \quad \int \cos^2 x \, du = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2} + c = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + c$$

يمكن حل هذا المثال بطريقة ثانية من خلال صيغة ضعف الزاوية

أي $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

ونحصل على النتيجة ذاتها.

---

2) $\int \ln(5x+3) \, dx$.

الحل:

نفرض أن $u = \ln(5x+3) \rightarrow du = \dfrac{5}{5x+3} dx$

ونفرض أن $dv = dx \rightarrow v = x$

حسب قانون التكامل بالتجزيء يكون لدينا

$$\int \ln(5x+3)\,dx = x\ln(5x+3) - \int \frac{5x}{5x+3}\,dx = x\ln(5x+3) - \int \frac{5x+3-3}{5x+3}\,dx$$
$$= x\ln(5x+3) - \int dx + \int \frac{3}{5x+3}\,dx = x\ln(5x+3) - x + \frac{3}{5}\ln(5x+3) + c$$
$$= \left(x + \frac{3}{5}\right)\ln(5x+3) - x + c$$

---

3) $\int x\,e^{-3x}\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \quad \to \quad du = dx$

ونفرض أن $dv = e^{-3x}\,dx \quad \to \quad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\,e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{2}x\,e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c = -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) + c$$

---

4) $\int x\sqrt{x+4}\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \quad \to \quad du = dx$

ونفرض أن $dv = (x+4)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad \to \quad v = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\sqrt{x+4}\,dx = \frac{2}{3}x(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+4)^{\frac{3}{2}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}(x+4)^{\frac{5}{2}} + c$$

---

5) $\int x\,e^{1-3x}\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \quad \to \quad du = dx$

ونفرض أن $dv = e^{1-3x}\,dx \quad \to \quad v = -\frac{1}{3}e^{1-3x}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على:

$$\int x\,e^{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x\,e^{1-3x} + \frac{1}{3}\int e^{1-3x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}x\,e^{1-3x} - \frac{1}{9}e^{1-3x}$$
$$= -\frac{1}{3}e^{1-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) + c$$

---

6) $\int x^5\,e^{x^3}\,dx$.

الحل:

بفرض أن $dv = x^2 e^{x^3}\,dx \quad , \quad u = x^3$ منها يكون لدينا

$$du = 3x^2\,dx \quad , \quad v = \frac{1}{3}e^{x^3}$$

$$\therefore \quad \int x^5\,e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}x^3\,e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c = \frac{1}{3}(x^3 - 1)\,e^{x^3}$$

---

7) $\int x^2\,e^x\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x^2 \;\rightarrow\; du = 2x\,dx$

ونفرض أن $dv = e^x\,dx \;\rightarrow\; v = e^x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$$

لنحسب الآن $\int x\,e^x\,dx$ ونستعمل مرة أخرى التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $du = dx \;\rightarrow\; u = x$ و $v = e^x \;\rightarrow\; dv = e^x\,dx$

نطبق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

نعوض في حساب التكامل المطلوب فنحصل على الناتج

$$\int x^2 \; e^x \; d\,x = x^2 e^x - 2(x-1)\, e^x + c$$
$$= (x^2 - 2x + 2)\; e^x + c$$

---

8) $\int \dfrac{d\,x}{4+9x^2}$.

الحل:

نفرض أن : $x = \frac{2}{3}\tan\theta$ نفاضل الطرفين و نحصل على $dx = \frac{2}{3}\sec^2\theta \;\; d\theta$

منها نعوض في التكامل لنحصل على:

$$\int \frac{\frac{2}{3}\sec^2\theta \;\; d\theta}{4+9\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{\sec^2\theta \;\; d\theta}{4 = 4\tan^2\theta}$$
$$= \frac{2}{12}\int \frac{\sec^2\theta \;\; d\theta}{4+4\tan^2\theta}$$
$$= \frac{1}{6}\int \;\; d\theta = \frac{1}{6}\theta + C$$
$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + C$$

---

9) $\int \;\; \sin^5 x \;\; dx$.

الحل:

باستخدام خواص ضعف الزاوية نجد أن :

$$\int \;\; \sin^5 x \;\; dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x \;\; dx$$
$$= \int \left(1-\cos^2\right)^2 \sin x \;\; dx$$
$$= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\sin xdx$$

نفرض $u = \cos x$ فيكون $du = -\sin x \;\; dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int \;\; \sin^5 x \;\; dx = -\int \left(1-2u^2+u^4\right) \; du$$
$$= -u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3}\left(\cos^3 x\right) + \frac{1}{5}\left(\cos^5 x\right) + c$$

---

10) $\int \tan^2 x \sec^4 x \; dx$.

الحل:

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \; dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \; dx$$
$$= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \; dx$$

نفرض $u = \tan x$ فيكون $du = \sec^2 x \; dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \; dx = \int u^2 (u^2 + 1) \; du$$
$$= \int (u^4 + u^2) \; du$$
$$= \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + c$$
$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$$

---

11) $\int \cos^3 x \sin 5x \; dx$.

الحل:

نفرض $u = \sin 5x$ فيكون $du = -5\sin 5x \; dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int \cos^3 x \sin 5x \; dx = -\frac{1}{5}\int \cos^3 x (-5\sin 5x) \; dx$$
$$= -\frac{1}{5}\int u^3 \; du$$
$$= -\frac{1}{5}\frac{u^4}{4} + c$$
$$= -\frac{1}{5}\frac{\cos^4 5x}{4} + c$$
$$= -\frac{1}{20}\cos 5x + c$$

---

12) $\int (3x+1)^4 dx$.

الحل:

نفرض $u = 3x + 1$ فيكون $du = 3 \; dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3}\int u^4 \; du = \frac{1}{15}u^5 + c$$
$$= \frac{1}{15}(3x+1)^5 + c$$

(13 $\int x^2 \; e^x \; d\,x$.

الحل:

نكامل بالتجزيء فارضين أن:

نفرض أن $u = x \;\; \to \;\; du = d\,x$ ونفرض أن $v = \tan\, x \;\; \to \;\; d\,v = \sec^2\, x\; d\,x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^2 \; e^x \; d\,x = x \tan\, x - \int \tan\, x \;\; dx$$
$$= x \tan\, x + \ln\left|\cos\, x\right| + c$$

(14 $\int x \sec x \tan x \, d\,x$.

الحل:

نكامل بالتجزيء فارضين أن:

نفرض أن $u = x \;\; \to \;\; d\,u = d\;x$

ونفرض أن $d\,v = \sec x \tan x d\,x \;\; \to \;\; v = \sec x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x \sec x \tan x \, d\,x = x \sec x - \int \sec x \;\; dx$$
$$= x \sec x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$$

(15 $\int x^3 \sin x \, d\,x$.

الحل:

نكامل بالتجزيء فارضين أن:

نفرض أن $u = x^3 \;\; \to \;\; d\,u = 3x^2 \;\; d\;x$

ونفرض أن $d\,v = \sin x d\,x \;\; \to \;\; v = -\cos x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^3 \sin x \, d\,x = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x \;\; dx$$

نتابع حساب التكامل الحاصل بالتجزيء التكامل $\int x^2 \cos x \;\; dx$ فنحصل على ناتج التكامل.

التكامل باستخدام الكسور الجزئية Partial Fractions Integration by

تمهيد:

تسمى الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ بدالة كسرية إذا كانت $f(x)\ ,\ g(x)$ كثيرتي حدود في x.

مثال:

الدوال التالية: $\dfrac{1}{x(x^2+1)}\ ,\ \dfrac{x(x+1)}{x^3+1}\ ,\ \dfrac{-2x+1}{x^2+1}\ ,\ \dfrac{x-1}{x^2+1}$ دوال كسرية.

بينما الدوال التالية: $\dfrac{|x-2|}{x^3}\ ,\ \dfrac{\sin x+e^x}{x^2}\ ,\ \dfrac{\ln x}{x}$ ليست بدوال كسرية.

إذا كانت درجة $f(x)$ اقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسرا حقيقيا.

يمكن التعبير عن كسر غير حقيقي بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقي مثل:

$$\frac{x^3-1}{x^2+1}=x-\frac{x+1}{x^2+1}$$

ويمكن التعبير عن كل كسر حقيقي بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل: $\dfrac{A}{(x-r)^k}$ أو $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث أن $(ax^2+bx+c)^k$ غير قابل للاختزال ليس له جذورا حقيقية.

وسنقتصر دراستنا على الكسور التي يمكن كتابتها بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) وسنتطرق إلى الحالات التالية:

الحالة الأولى:

إذا كانت $f(x)\ ,\ g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$$g(x)=(x+r_1)(x+r_2)(x+r_3)................(x+r_n)$$

حيث أن:

$$r_1\neq r_2\neq r_3\neq ....\neq r_n$$

وذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا فإنه يمكن وضعه في الصورة :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x+r_1}+\frac{A_2}{x+r_2}+\frac{A_3}{x+r_3}+.................+\frac{A_n}{x+r_n}$$

حيث أن: $A_1\ ,A_2\ ,A_3\ ,.........,A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال:

فرق الكسر التالي $\frac{2x+1}{x^2-4}$ إلى مجموع كسوره جزئية.

الحل:

نفرض أن الثابتين A_1 , A_2 يحققان ما يلي :

$(1) \quad \rightarrow \quad \frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2}$ حيث A_1 , A_2 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا:

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{A_1(x+2) + A_2(x-2)}{x^2-4}$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2-4 فنحصل على:

$$2x+1 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$$

هذه المعادلة صحيحة من اجل كل عدد x :

نأخذ $x=-2$ فنحصل على $2(-2)+1 = A_1(-2+2) + A_2(-2-2)$

ومنه $-3 = -4A_2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{3}{4}$

نأخذ $x=2$ فنحصل على $2(2)+1 = A_1(2+2) + A_2(2-2)$

ومنه $5 = 4A_1 \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{5}{4}$

نعوض A_1 , A_2 في المعادلة (1) فيصبح لدينا:

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{5}{4}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

مثال:

اوجد التكامل $\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx$.

الحل:

نلاحظ : انه لا يمكننا استخدام احد قوانين التكامل مباشرة ولكن من المثال السابق لدينا :

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{5}{4}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

إذا

$$= \frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\ln|x+2| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left[\left|(x-2)^5\right|\left|(x+2)^3\right|\right] + c$$

$$= Ln\sqrt[4]{\left|(x-2)^5\right|\left|(x+2)^3\right|} + C$$

الحالة الأولى:

إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة:

$g(x) = (x+r)^n$ حيث أن $n \in N$

و كانت $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا فإنه يمكن وضعه في الصورة :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x+r)} + \frac{A_2}{(x+r)^2} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{A_{n-1}}{(x+r)^{n-1}} + \frac{A_n}{(x+r)^n}$$

حيث $A_1 , A_2 , A_3 , \dots\dots\dots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها

مثال:

فرق الكسر $\dfrac{x-2}{(x+1)^3}$ إلى كسوره الجزئية.

الحل:

نفرض أن الثوابت A_1 , A_2 , A_3 تحقق ما يلي :

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} \quad \rightarrow \quad (2)$$

حيث A_1 , A_2 , A_3 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3}{(x+1)^3}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)^3$ فنحصل على:

$$x-2 = A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3$$

هذه المعادلة صحيحة من اجل كل عدد x

نأخذ $x=-1$ فنحصل على $-1-2 = 0+0+A_3$ ومنه $A_3 = -3$

نأخذ $x=0$ فنحصل على : $-2=A_1+A_2+A_3$

ومنه $-2=A_1+A_2-3 \;\rightarrow\; A_2=1-A_1$

نأخذ $x=1$ فنحصل على: $1-2=A_1(2)^2+A_2(2)^2+A_3$

ومنه فإن $-1=4A_1+4A_2-3 \;\rightarrow\; -1=4A_1+2(1-A_1)-3$

$$\rightarrow\; -1=4A_1+2-2A_1-3 \;\rightarrow\; 2A_1=-1+1=0 \;\rightarrow\; A_1=0$$

وبالتالي فإن: $0=1-A_2 \;\rightarrow\; A_2=1$

نعوض $A_1\,,A_2\,,A_3$ في المعادلة (2) فيصبح لدينا:

$$f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

مثال:

اوجد التكامل $\int \frac{x-2}{(x+1)^3}\,dx$.

الحل:

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام احد قوانين التكامل مباشرة ولكن من المثال السابق لدينا:

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

إذا

$$\int \frac{x-2}{(x+1^)3}\,dx=\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx-3\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$

$$=-(x+1)^{-1}+\frac{3}{2}(x+1)^{-2}+$$

ملاحظة:

يمكن استعمال الحالتين في آن واحد كما هو موضح في المثال التالي:

مثال:

فرق الكسر $\frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}$ إلى كسوره الجزئية.

الحل:

لدينا $\frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)(x-1)}=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}$

نفرض أن $A_1\,,A_2\,,A_3$ تحقق ما يلي:

$\rightarrow$ (3) $\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2}$ حيث A_1 , A_2 , A_3 ثوابت يجب تعيينها

نلاحظ : أننا استعملنا الحالتين الأولى والثانية معا

نوحد المقامات فيصبح لدينا :

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{A_1(x-1)^2+A_2(x+1)(x-1)+A_3(x+1)}{(x^2-1)(x-1)}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x^2-1)(x-1)$ فيكون لدينا:

$$3x-1=A_1(x-1)^2+A_2(x+1)(x-1)+A_3(x+1)$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x :

نأخذ $x=1$ فنحصل على $3(1)-1=A_1(1-1)^2+A_2(1+1)(1-1)+A_3(1+1)$

ومنه $A_3=1 \quad \rightarrow \quad 2=2A_3$

نأخذ $x=-1$ فنحصل على

$$3(-1)-1=A_1(-1-1)^2+A_2(-1+1)(-1-1)+A_3(-1+1)$$

ومنه $A_1=-1 \quad \rightarrow \quad -4=4A_1$

نأخذ $x=0$ فنحصل على $3(0)-1=A_1(0-1)^2+A_2(0+1)(0-1)+A_3(0+1)$

ومنه فإن $A_2=A_1+A_3+1=1 \quad \rightarrow \quad -1=A_1-A_2+A_3$

نعوض A_1 , A_2 , A_3 في المعادلة (3) فيصبح لدينا :

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

مثال:

اوجد التكامل $\int \frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}\,dx$.

الحل:

نلاحظ : أننا نحتاج إلى تفريق الكسر $\frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}$ ومن المثال السابق لدينا

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

إذا:

$$\int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx=\int \frac{1}{x+1}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| - (x-1)^{-1} + c$$
$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x-1} + c$$

مثال:

اوجد التكامل التالي: $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$.

الحل:

واضح إن الدالة مستمرة على الفترة $R-\{0,-2,2\}$ باستخدام الطرق السابقة تكون لدينا صيغة التفريق التالية: $\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} = 5+\frac{2}{x}+\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}$

وبذلك يكون التكامل على الشكل التالي:

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx = \int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}\right)dx$$
$$= 5x + 2Ln|x| + 4Ln|x+2| + 3Ln|x-2| + C$$
$$= 5x + Ln\left(x^2(x+2)^4(x-2)^3\right) + C$$

مثال:

اوجد التكامل التالي: $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$.

الحل:

واضح إن الدالة مستمرة على الفترة $R-\{-2,-1\}$ باستخدام الطرق السابقة تكون لدينا صيغة التفريق التالية:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

وبذلك يكون التكامل على الشكل التالي:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right)dx$$
$$= Ln|x+1| - Ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C$$
$$= \frac{1}{x+2} + Ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

النظرية الأساسية لحساب التكامل المحدود : Fundamental Theorem

تعريف:

ليكن I مجالاً غير خالٍ من R. ولكن $f:I\to R$ دالة مستمرة على I حيث $I=[a,b]$ عندئذ نسمى العدد $F(b)-F(a)$ التكامل المحدود من a و b للدالة f ، ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\ dx$ أو $\int_a^b f(t)\ dt$ أي أن: $\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f .

تعريف :

ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير خالٍ من R. وليكن f دالة مستمرة من $f([a,b],R)$ ، ولتكن $\delta=\left(t_0,t_1,t_2,....t_m,\lambda_{0,}\lambda_{1,}\lambda_{2,},......\lambda_{m-1,}\right)\in R^{m+1}\times R^m$ تقسيم للمجال $[a,b]$ عندئذ نرمز بالرمز $S(f,\sigma)$ إلي المقدار $S(f,\sigma)=\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)f(\lambda_k)$ ونسمى $S(f,\sigma)$ مجموع ريمان Riemann للدالة f وفقاً للتقسيم الموضح في δ فالمجموع $S(f,\sigma)$ يمثل المجموع الجبري لمساحات المستطيلات التي أبعادها $(t_{k+1}-t_k)\times f(\lambda_k)$.

ولما كان واضحاً أن مجموع ريمان $S(f,\sigma)$ يقترب في حالة كون الدالة f مستمرة، من المساحة الجبرية للسطح المحصور بين منحني الدالة f والمحور x والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ عندما تصغر المساحة في الفترات $[t_i,t_{i+1}]$ صغراً متناهياً أي يقترب إلي الصفر منها نستنتج أن التكامل $\int_a^b f(x)\ dx$ يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f والمحور x والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. كما موضح في الشكل التالي:



تعريف:

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ تكاملا غير محدود للدالة $f(x)$ فإن التكامل المحدود يعطى بما يلي:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_1^2 x\,dx$.

الحل:

$$\int_1^2 x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_0^3 (x^3-4x+1)\ dx$.

الحل:

$$\int_0^3 (x^3-4x+1)\ dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}+x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{3^4}{4}-\frac{4\times 3^2}{2}+3\right]-0 = \frac{81}{4}-18+3=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{--2}^{2} \left(x^4+x^3+5x+10\right)\ dx$

الحل:

واضح أن الدالة كثيرة حدود فإن تكاملها يكون على النحو التالي:

$$\int_{--2}^{2} \left(x^4+x^3+5x+10\right)\ dx = \left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}+10x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$=\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{4}+\frac{02}{2}+20\right)-\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{4}+\frac{02}{2}+20\right)$$

$$=0$$

مثال:

احسب التكامل التالي: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \; d\theta$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \; d\theta = \sin\theta \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

خواص التكامل المحدود : Properties of Definite Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ حيث a , b , c ثوابت.

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. إذا كانت $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترة $[a,b]$ من a إلى b وكان c ثابتاً حقيقياً فإن $c\,f(x)$ قابلة للتكامل في هذه الفترة كذلك و التكامل هو :

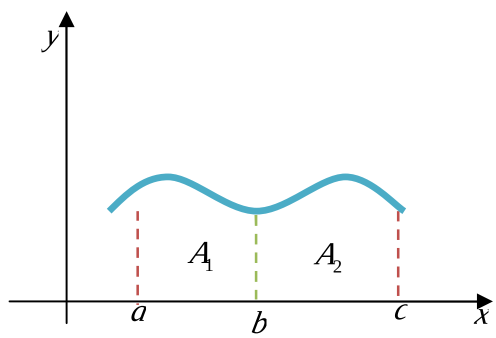
$$\int_a^b c\; f(x)\; dx = c\int_a^b f(x)\; dx$$

4. إذا كان $f(x) , g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل في الفترة من a إلى b فإن : $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ دوال قابلة للتكامل في نفس الفترة إذا :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

5. إذا كان $a<c<b$ وكانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترة $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = A_1 + A_2$$



6. إذا كان $f(x) \geq g(x)$ لجميع قيم x في النطاق $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_{-2}^{6} 5\,dx$.

الحل:

$$\int_{-2}^{6} 5\,dx = 5(6-2) = 40$$

مثال:

أوجد التكامل الآتي $\int_{-2}^{3} (6x^2 - 5)\,dx$.

الحل:

$$\int_{-2}^{3} (6x^2 - 5)\,dx = 2x^3 - 5x \Big|_{-2}^{3} = (54-15) - (-16+10) = 45$$

مثال:

أوجد التكامل التالي: $\int_{-1}^{2} (x^3 - 1)^2\,dx$

الحل:

$$\int_{-1}^{2} (x^3+1)^2\,dx = \int_{-1}^{2} (x^6 + 2x^3 + 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^4 + x \Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{128}{7} + 8 + 2\right) - \left(\frac{-1}{7} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{405}{14}$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$.

الحل:

$$\because \quad |x| = \begin{cases} x \quad , & if \quad x \geq 0 \\ -x \quad , & if \quad x < 0 \end{cases}$$

ومنه فإن :

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 0 = \frac{5}{2}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x\,dx$.

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan^2 0\right] = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2-2x+3}\,(3x-1)\,dx$.

الحل:

لإيجاد $\int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2-2x+3}\,(3x-1)\,dx$ نستخدم التعويض $u = 3x^2-2x+3$

فنحصل على $du = (6x-2)\,dx$ ومنه يكون لدينا:

$$\int \sqrt{3x^2-2x+3}\,(3x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2-2x+3}\,(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3-2+3)^{\frac{3}{2}} - (3+2+3)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(8-16\sqrt{2}) = \frac{8}{3}(1-2\sqrt{2})\right]$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي:: $\int_{-1}^{1}\left(2x^3+4x-12\right)\,dx$.

الحل:

$$\int_{-1}^{1}\left(2x^3+4x-12\right)\,dx=\left(\frac{2}{4}x^4+\frac{4}{2}x^2-12x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}-12\right)-\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}+12\right)=0$$

مثال:

أوجد الخطأ فيما يلي : $\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}\,dx$.

الحل:

$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{3}=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$$

هذا الحساب يجب أن يكون خاطئاً لان الجواب سالب، ولكن الدالة المكاملة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ موجبة دوماً وهذا يناقض الخاصة القائلة أن تكامل الدالة الموجبة في أي مجال يعطي قيمة موجبة فما الخطأ.

إن الخطأ يكمن في إننا لا يمكن أن نطبق النظرية الأساسية للتكامل المحدود في المجال لا تكون $f(x)$ مستمرة فيه وإذا لاحظنا أن $0\in[-1,3]$ وأن $f(x)$ غير مستمرة عند $x=0$ نعرف الخطأ المرتكب.

في نهاية هذه الفقرة نورد:

أهم الخصائص الأساسية للتكامل المحدود:

1. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ وكانت $a<x<b$ فإن $g(x)=\int_{a}^{x}f(t)\,dt$ دالة مستمرة أيضا.
2. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن $\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0$
3. إذا كانت $f(x)\geq g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فإن $\int_{a}^{b}f(x)\,dx\geq\int_{a}^{b}g(x)\,dx$
4. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن $\int_{a}^{b}f(x)\,dx=-\int_{b}^{a}f(x)\,dx$
5. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ وكانت $a<c<b$ فإن $\int_{a}^{a}f(x)\,dx=\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}f(x)\,dx$

6. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن $\left|\int_a^a f(x)\ dx\right| \le \int_a^a |f(x)|\ dx$

7. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{دالة فردية } f \\ 2\int_0^a f(x)\ dx & \text{دالة زوجية } f \end{cases}$$

8. إذا كان $f(x)\ge 0$ في الفترة $a\le x\le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge 0$

9. إذا كان $f(x)\ge g(x)$ في الفترة $a\le x\le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{-1}^{1} (x^4-2x^2+3)\ dx$

الحل:

نلاحظ: أن الدالة : $f(x)=x^4-2x^2+3$ دالة زوجية لأن:

$$f(-x)=(-x^4)-2(-x^2)+3=\mathrm{f}\ (x)$$

$$\int_{-1}^{1} (x^4-2x^2+3)\ dx = 2\int_0^1 (x^4-2x^2+3)\ dx$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+3\right)$$

$$= 2\left(\frac{3-10+45}{15}\right) = 2\left(\frac{38}{15}\right) = \frac{76}{15}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \tan^6 x\ \ dx$.

الحل:

نلاحظ أن الدالة: $f(x)=\sin^3 x\tan^6 x$ فردية لأن:

$$f(-x)=\sin^3(-x)\tan^6(-x)=-\sin^3 x\tan^6 x=-f(x)$$

يكون الناتج مساوياً للصفر حسب قواعد الأساسية للتكامل المحدود.

أمثلة محلولة

1- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

الحل:

نفرض أن : $u=\tan x$ منها نحصل على:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x\cos^4 x}$$

ولكن $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ وكذلك $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ ومنها نحصل على:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{u^2}\left(1+u^2\right)^2 \, du$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \left(\frac{1}{u^2}+2+u^2\right)du$$

$$= -\frac{1}{u}+2u+\frac{u^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$

$$= \frac{4}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$$

2- أحسب قيمة التكامل التالي: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$.

الحل:

نجري التحويل التالي: $x=2\tan^{-1} t$ أي أن $t=2\tan\frac{x}{2}$ نعوض في التكامل ملاحظين

$\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$I=\int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\quad dt$$

$$=\int_0^1 \frac{4t}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}dt$$

واضح إن التكامل أصبح كسراً لذلك نفرق الكسر:

$$\frac{4t}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{(1+t)}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{1+t^2}$$

بعد إجراء الحسابات نحصل على قيم للثوابت على النحو التالي:

$C=0 \quad , \quad D=2 \quad , \quad B=-2 \quad , \quad A=0$ ؛

كما أن:

$$I=\int_0^1\left(\frac{2}{1+t^2}-\frac{2}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$=2\tan^{-1}t+\frac{2}{1+t}\bigg|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

3- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

الحل:

نحول التكامل إلي الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}=\int_0^1 \frac{\left(e^x\right)'}{1+\left(e^x\right)^2}\quad dx$$

نفرض أن : $u=e^x$ نفاضل الطرفين نحصل على $du=e^x \quad dx$

منها بالتعويض في التكامل:

$$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}=\int_1^e \frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big|_1^e$$

$$=\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$$

4- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

الحل:

سنرمز لدالة ما تحت التكامل بــ $f(x)$ وبأخذ العلاقة

$2\sin x\cos x = (\cos x + \sin x)^2 - 1$ بعين الاعتبار نجد أن :

$$f(x) = \frac{\lfloor(\cos x + \sin x)^2 - 1\rfloor \sin x}{2(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x \cos x + \sin^2 x) - \frac{\sin x}{2(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sin}{2(\cos x + \sin x)}$$

و بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sin}{2(\cos x + \sin x)} \right) dx$$

$$= \frac{-\cos 2x}{8} - \frac{\sin 2x}{8} + \frac{1}{4}\ln(\cos x + \sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

5- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_{3}^{4} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx$.

الحل:

بقسمة البسط على المقام يكون لدينا التكامل التالي:

$$\int_{3}^{4} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int_{3}^{4} x + 1 + \frac{1}{(x-1)(x-2)} \; dx$$

$$= \int_{3}^{4} x + 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \; dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x\Big|_{3}^{4} + Ln\frac{x-2}{x-1}\Big|_{3}^{4} = \frac{9}{2} + Ln\frac{4}{3}$$

6- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx$.

الحل:

باستخدام تفريق الكسور نوجد $\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$ نوجد قيمة الثوابت

$$A=-1 \quad , \quad B=1 \quad , \quad D=0 \quad , \quad C=1$$

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx=\int_0^1 \frac{-x+1}{x^2+2}dx+\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}dx=I_1+I_2$$

نوجد قيمة I_1 كالتالي:

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1 \frac{-x}{x^2+2}dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}dx\\&=-\frac{1}{2}Ln\left(x^2+2\right)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1\\&=-\frac{1}{2}Ln(3)+\frac{1}{2}Ln2+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}0\\&=\frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\\&=\frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ثم نوجد قيمة I_2 كالتالي:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx$$

نستخدم طريقة التعويض كالتالي:

نفرض أن : $u=x^2+2$ بتفاضل الطرفين نحصل على $du=2x\;dx$:

عندما: $x=0 \quad , \quad u=2$
$x=1 \quad , \quad u=3$

بالتعويض في التكامل I_2 نحصل على :

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{du}{u^2}=\frac{1}{2u}\Big|_2^3=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

بذلك تكون قيمة التكامل على الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx=\frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{12}$$

7- أحسب قيمة التكامل التالي: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x+\sin x}$.

الحل:

نجري التكامل بالتعويض مفترضين: $u=\tan^{-1} t$ أي أن $t=\tan\frac{x}{2}$ فنجد أن:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \ ,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \ , \ dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

بالتعويض نجد :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x+\sin x}=\int_0^1 \frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\ dt$$

$$=\int_0^1 \frac{dt}{4+t+t^2}=\int_0^1 \frac{dt}{\frac{15}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{15}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\left(\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{15}}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

8- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1}dx$.

الحل:

باستخدام القسمة المطولة نجد أن $\frac{x^4+1}{x^3+1}$ تساوي $\frac{x^4+1}{x^3+1}=x+\frac{1-x}{x^3+1}$: بذلك يكون التكامل على الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1}dx=\int_0^1 x\ \ dx+\int_0^1 \frac{(1-x)}{x^3+1}\ \ dx=I_1+I_2$$

نوجد I_1:

$$\int_0^1 x\ \ dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

ثم نوجد I_2 باستخدام تفريق الكسر:

$$\frac{1-x}{x^3+1}=\frac{1-x}{(x+x)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

بعد إجراء الحسابات نحصل على قيم للثوابت على النحو التالي:

$$A=\frac{2}{3} \quad , \quad B=-\frac{2}{3} \quad , \quad C=\frac{1}{3}$$

$$I_2=\int_0^1 \frac{(1-x)}{x^3+1}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}Ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}Ln(x^2-x+1)\Big|_0^1=\frac{2}{3}Ln(2)$$

بذلك تكون قيمة التكامل هي: $I=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}Ln(2)$

9- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_4^6 \frac{2x+5}{x^2-7x+10}dx$ ؟

الحل:

نعلم بان $x^2-7x+10$ بذلك نحصل على : $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

بذلك يصبح الكسر على الشكل التالي:

$$\frac{2x+5}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}$$

منها يكون لدينا:

$$2x+3=A(x-5)+B(x-2)$$

نوجد قيمة كلا من A و B

من المعادلة السابقة تكون قيمة $A=-1$ و $B=1$ منها يكون التكامل على النحو التالي:

$$\int_4^6 \frac{2x+5}{x^2-7x+10}dx=-\int_4^6\frac{dx}{x-2}+\int_4^6\frac{dx}{x-5}=\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|_4^6=\ln\left|\frac{1}{2}\right|$$

تطبيقات على التكامل المحدود : Applications of Integrals

التكامل المحدود يعتبر أداة فعالة في حل بعض المسائل الفيزيائية والهندسية وإيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيات هي إحدى تلك المسائل.

1. المساحة بين منحنين: Area Between Curves

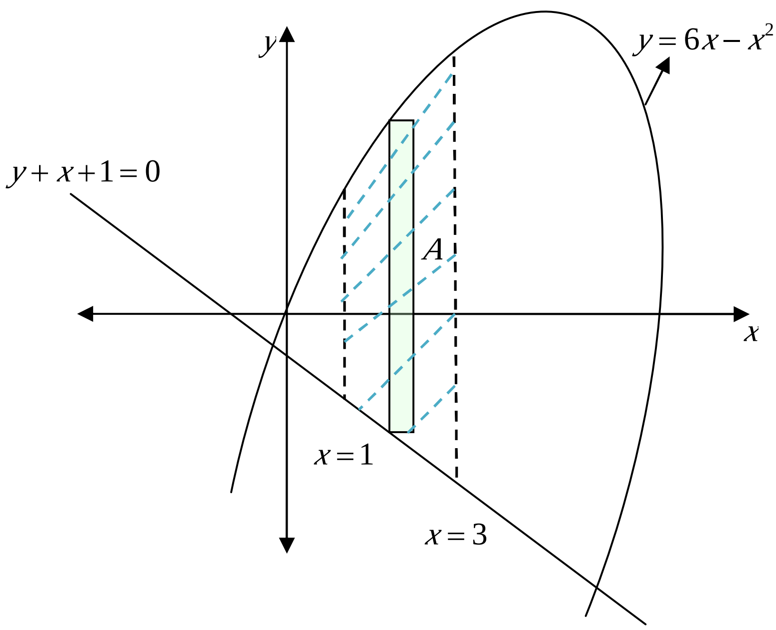
إذا كان لدينا منطقة محصورة بين منحنين فإننا نحدد المنطقة المغلقة لهذين المنحنين ثم نوجد نقاط التقاطع بالنسبة للمنحنين كما موضح في الأمثلة التالية:

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنين التاليين :

$y = 6x - x^2$, $y + x + 1 = 0$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$.

الحل:



من رسم المنحنين ونقاط تقاطعهما يكون لدينا:

$\because \quad y+x+1=0 \quad , \quad y=6x-x^2$

$\therefore \quad dA=\left((6x-x^2)-(-(x+1))\right)dx$

$\therefore \quad dA=(7x+1-x^2)\,dx$

$\therefore \quad A=\int_1^3 dA=\int_1^3 (7x+1-x^2)\,dx \quad =\frac{7}{2}x^2+x-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3$

$$=\left(\frac{63}{2}+3-9\right)-\left(\frac{7}{2}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{3} \quad square \;\; unit$$

مثال:

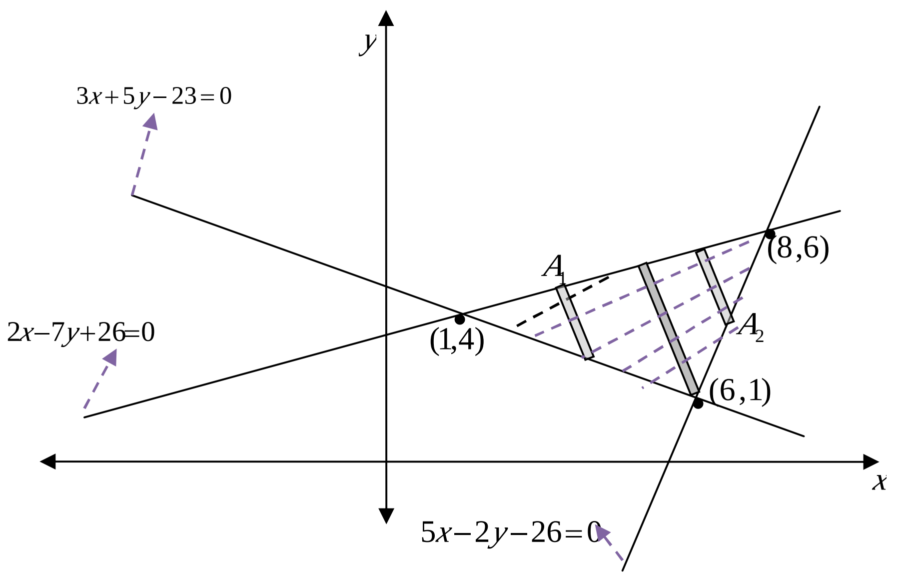
أوجد المساحة المحددة بالمعادلات الثلاث الآتية :

$$3x+5y-23=0 \quad , \quad 5x-2y-26=0 \quad , \quad 2x-7y+26=0$$

الحل:

جميع هذه المعادلات تمثل معادلات خط مستقيم نوجد نقاط تقاطع هذه المستقيمات الثلاثة.

ونقاط التقاطع هي $(6,1)$, $(8,6)$, $(1,4)$



نقسم الفترة $[1,8]$ إلى فترتين $[1,6]$ و $[6,8]$ وفي كل فترة لدينا سطح محصور بين منحنين:

$\therefore \quad dA=dA_1+dA_2$

$$A=\int dA_1+\int dA_2$$

$$dA = dA_1 + dA_2 = [y_2 - y_1]\,dx + [y_2 - y_3]\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{7}(2x+26) - \frac{1}{5}(-3x+23)\right]dx + \left[\frac{1}{7}(2x+26) - \frac{1}{2}(5x-26)\right]dx$$
$$\therefore\ A = \int_1^6 \left[\frac{31x}{35} - \frac{31}{35}\right]dx + \int_6^8 \left[\frac{-31x}{14} - \frac{234}{14}\right]dx$$
$$\therefore\quad A = \frac{31}{35}\int_1^6 (x-1)\,dx + \frac{1}{14}\int_6^8 (-31x - 234)\,dx$$
$$= \frac{31}{35}\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^6 + \frac{1}{14}\left[-31\left(\frac{x^2}{2}\right) + 234\,(x)\right]_6^8$$
$$= \frac{31}{35}\left(\left[\frac{36}{2} - 6\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right]\right) + 14\left[-31\left(\frac{8^3}{2} + 234\,(8)\right) - 31\left(\frac{6^2}{2} + 234(6)\right)\right]$$
$$= \frac{31}{35}\left(\frac{25}{2}\right) + \frac{1}{14}(880 - 846) = \frac{155}{14} + \frac{34}{14} = \frac{189}{14} = 13.5 \quad square\ \ unit$$

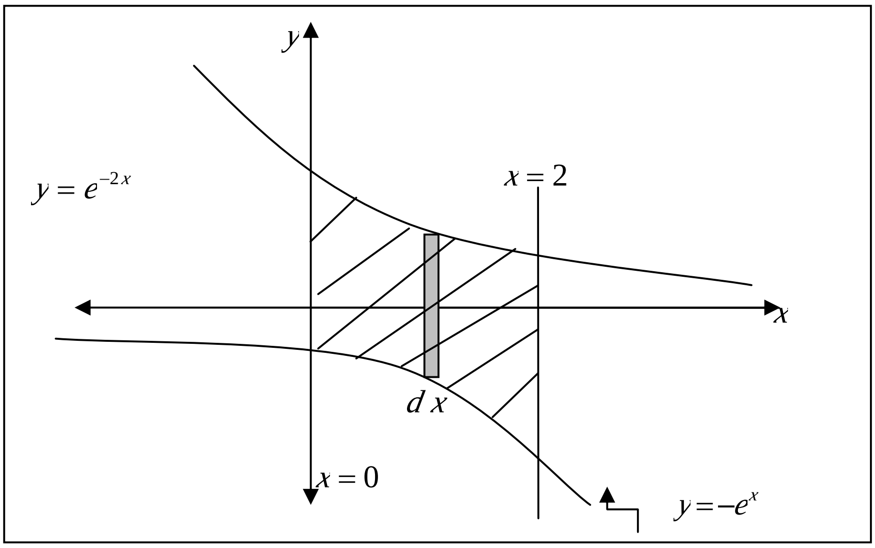
مثال:

أوجد المساحة المحصورة بالمنحنيات $x=0$, $x=2$, $y=e^{-2x}$, $y=-e^{x}$.

الحل:

نرسم أولاً ثم نحدد حدود التكامل: $dA = (e^{-2x} + e^{x})\,dx \quad \therefore$

$$A = \int_0^2 (e^{-2x} + e^{x})\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{x}\right]_0^2$$
$$= \left[\frac{-1}{2}e^{-4} + e^{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}(e^{-4} + 1) + e^{2} \quad square\ \ uni$$

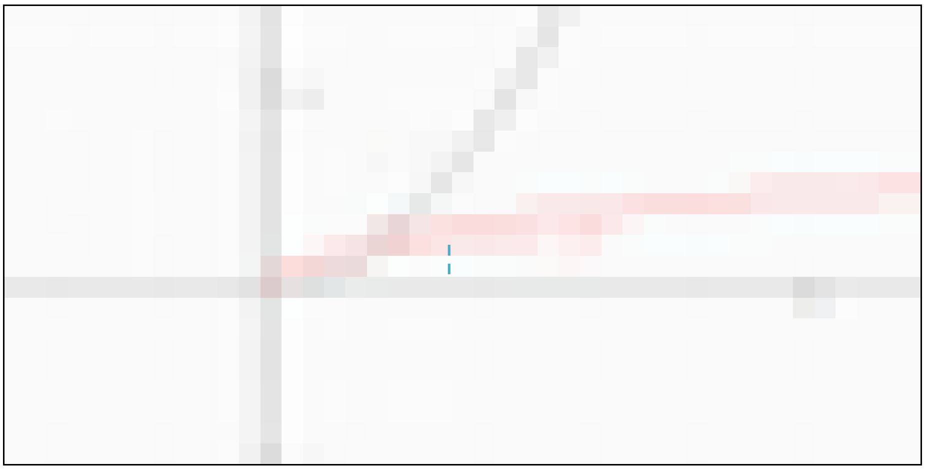


مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنين $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$.

الحل:

نوجد تقاطع المنحنين: $\sqrt{x}=x^2 \Leftarrow x=0 \quad , \quad x=1$



$$\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

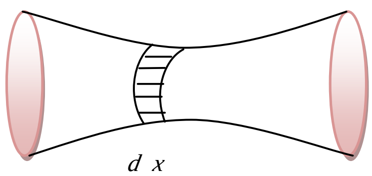
2. حجوم المجسمات الدورانية Volumes of Revolution:

إذا تم دوران منحنى مستوي حول المحور x من مستوي xy نحصل على سطح دوراني. وبمعنى أخر نحصل على المجسم الناتج من دوران مساحة مستوية حول محور معين، ولإيجاد حجم مجسم من هذه المجسمات بفرض أن محور الدوران $0x$ بين النقطتين $x=a$ و $x=b$ نلاحظ أنه عبارة عن تجمع مجموع أقراص اسطوانية قطرها y وطولها dx .

$$A=\pi y^2 \quad \rightarrow \quad dv = A\,dx = \pi y^2\,dx$$

ومنها نحصل على $\therefore \quad V=\int_a^b \pi y^2\,dx$

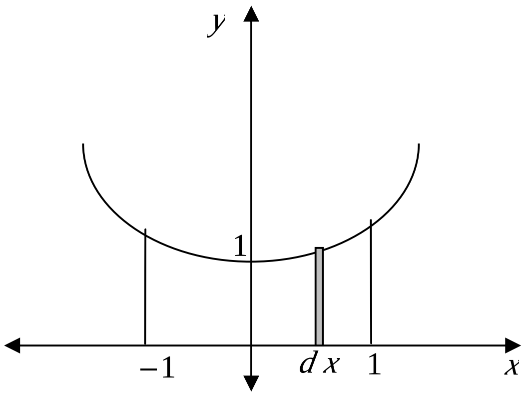
$$\therefore \quad V=\int_a^b \pi y^2\,dx = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx$$

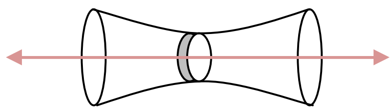


مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران الدالة $f(x)=x^2+1$ حول المحور x من $x=-1$ إلى $x=1$.

الحل:





$$\therefore \quad V=\pi\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2\,dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(x^4+2x^2+1)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)\right]$$

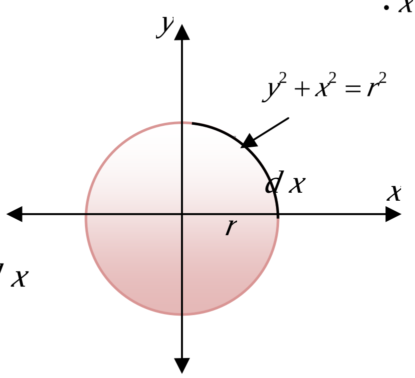
$$=\pi\left[\frac{2}{5}+\frac{4}{3}+2\right]=\pi\left[\frac{6+20+30}{15}\right]$$

$$=\frac{56}{15}\pi \quad cubic\ \ unit$$

مثال:

أوجد حجم نصف كرة باستخدام طريقة المجسمات الدورانية والناتج من دوران ربع دائرة حول محور x.

الحل:



$$\because \quad y^2=r^2-x^2$$

$$y\ dv=\pi y^2\,dx$$

$$\therefore \quad V=\pi\int_{0}^{r}y^2\,dx=\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

$$V=\pi\left[r^3.x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$

$$=\pi\left[(r^3-\frac{1}{3}r^3)-(0)\right]=\frac{2\pi}{3}r^3 \quad cubic \quad unit$$

مثال:

احسب حجم المجسم ألدوراني المتولد من دوران القطع الناقص حول $0x$ معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

الحل:

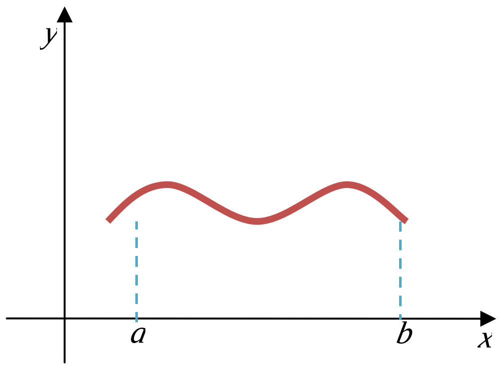
نعوض في المعادلة $V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx$ عن قيمة y فنحصل على:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\;dx=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$=\frac{4\pi ab^2}{3} \qquad cubic \quad unit$$

3. حساب طول قوس من منحنى: Arc Length Surface Area

طول القوس من أي منحنى هو نهاية طول مضلع مرسوم داخل هذا القوس عندما يؤول عدد أضلاعه إلى اللانهاية.



$$S=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

وفي حال أعطي المنحني بمعادلات وسيطية يصبح الطول على النحو التالي:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

مثال:

احسب طول المنحنى $x=a(t-\sin t)$ و $x=a(t-\cos t)$ في المجال $[0,2\pi]$.

الحل:

بتفاضل المنحني نحصل على: $x'=a(1-\cos t)$ و $y'=a\sin t$

وبالتعويض في قانون المسافة بين نقطتين نحصل على:

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}=2a\sin(\frac{1}{2})$$

بذلك يكون لدينا:

$$S=\int_0^{2\pi}2a\sin(\frac{1}{2})t\ dt$$

$$=2a\left(-2\cos(\frac{1}{2})t\right]_0^{2\pi}=8a \qquad \textit{cubic unit}$$

4. نظرية القيمة الوسطى في التكامل المحدود: Main Theorem in Integral

لتكن الدالة $f(x)$ المستمرة في الفترة $[a,b]$ عندئذ نجد إن هناك قيمة $C\in[a,b]$ بحيث يكون:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(C)$$

نسمي القيمة $f(C)$ بالقيمة الوسطى للدالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$.

مثال:

حقق نظرية القيمة الوسطى للتكامل التالي: $\int_{-1}^{1}x^2\ dx$.

الحل:

حسب النظرية السابقة يكون لدينا :

$$\int_{-1}^{1}x^2\ dx=2f(C)=2C^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \quad dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

إذا : $c^2 = \frac{1}{3} \Leftarrow \frac{2}{3} = 2c^2$ منها يكون لدينا :

$c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ القيمتان مقبولتان لأنهما داخل الفترة.

مثال:

حقق نظرية القيمة الوسطى للتكامل التالي:

$$\int_{-1}^{1} x^3 \quad dx$$

.

الحل:

حسب نظرية القيمة الوسطى يكون :

$$\int_{-1}^{1} x^3 \quad dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0 = 2\,f(C)$$

واضح أن :

$$0 = 2\,f(C) = 2C^3$$

وهذا يؤدى إلى :

$$C = 0 \in [-1,1]$$

التكاملات المعتلة : Improper Integrals

سبق وعرفنا في فقرة سابقة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\ dx$ حيث f دالة معرفة ومستمرة على الفترة المغلق $[a\,,b]$ وبينا أنه إذا وجد هذا التكامل فإن الدالة f ستكون محدودة على هذا المجال.

سنقوم الآن بتعميم مفهوم التكامل المحدود إلى الحالة التي تكون فيها الدالة f معرفة على احد المجالات التالية: $[a\,,\infty)$ أو $(-\infty,b]$ أو $(-\infty,\infty)$ وسنسمى التكامل في هذه الحالة تكاملا معتلا أو معمم من النوع الأول وتكون على الشكل التالي:

أما التكاملات المعتلة من النوع الثاني فهي تكاملات على فترات محدودة ولكن الدالة f تعاني من نقطة واحدة على الأقل داخل الفترة المكاملة $[a\,,b]$.

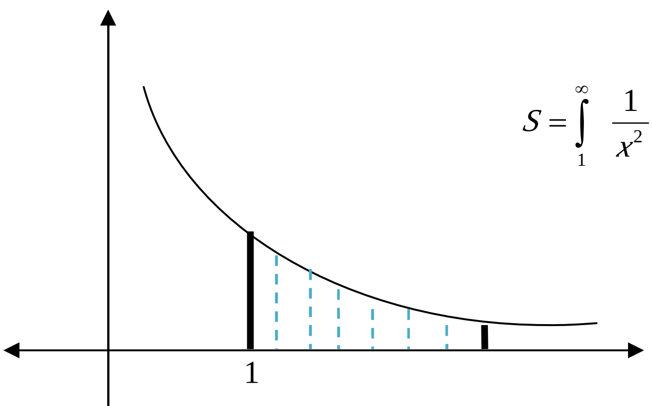
وفي هذا المقرر سنقصر دراستنا على النوع الأول لأهميته الكبيرة أثناء دراسة تحويلات لا بلاس وتحويلات فورييه.

مثال:

لنفرض إننا نهتم بحساب مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الدالة $y=\dfrac{1}{x^2}$ ومحور السينات الواقعة على يمين المستقيم $x=1$

الحل:

إن هذه المساحة تعطى بالتكامل $S=\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\ dx$



في الواقع يمكن حساب هذه المساحة على الشكل التالي:

$$S = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\ dx \quad = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t}+1\right) \quad = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t}+1\right)=1$$

تعريف التكامل المعتل : Improper Integral

بفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على المجال $[a,\infty)$ عندها نقول أن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ معتلا ويكون متقاربا إذا وجد التكامل $\int_a^{t} f(x)\ dx$ لكل $t \in [a,\infty)$ وعندها نكتب : $\int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\ dx$ وبشكل مشابه نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx$ ونقول أنه متقارب إذا وجدت النهاية $\int_{\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{b} f(x)\ dx$ لكل $t \in (-\infty, b]$.

وأخيرا نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ ونقول أنه متقارب إذا كان التكامليين المعتلين التالين متقاربين $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ و $\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx$ ونكتب ذلك في هذه الحالة على الشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{a} f(x)\ dx + \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\ dx$$

حيث a أي نقطة من R.

مثال:

حدد إذا ما كان التكامل المعتل $S=\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\ dx$ متقارباً أم لا.

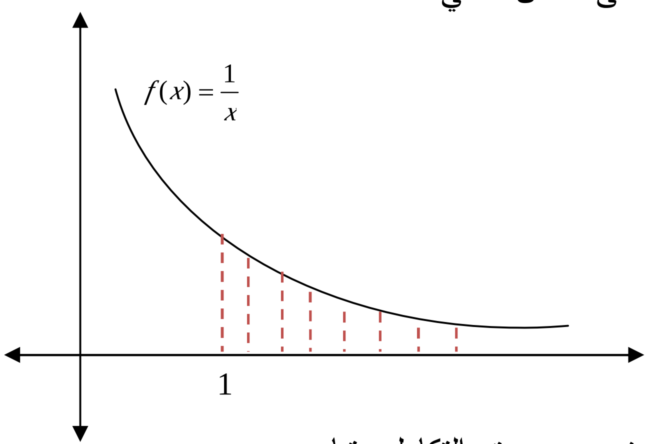
الحل:

إن هذا التكامل المعتل من النوع الأول حيث $a=1$ وبالتالي يكون لدينا:

في الواقع يمكن حساب هذه المساحة على الشكل التالي:

$$S = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(Ln(t)-1\right)\Big|_1^{t} = \infty - 1$$



إذا النهاية غير موجودة و التكامل متباعد

مثال:

أوجد قيمة P التي تجعل التكامل المعتل $S=\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\,dx$ متقارباً.

الحل:

لاحظ في المثالين السابقين أن $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ متباعد وأن $S=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب.
لذلك سنفرض الآن أن : $P\neq 1$ منجد حسب التعريف :

$$S=\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\,dx\,\underset{t\to\infty}{Limt}\int_1^t \frac{dx}{x}=\underset{t\to\infty}{Limt}\left.\frac{x^{-p+1}}{-P+1}\right|_1^t$$

$$=\frac{1}{1-P}\underset{t\to\infty}{Limt}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right)$$

نميز الحالتين :

1) عندما $P>1$ فإن $P-1>0$ وبالتالي: $\underset{t\to\infty}{Limt}\frac{1}{t^{p-1}}=0$ بذلك يكون لدينا :

في الواقع يمكن حساب هذه المساحة على الشكل التالي:

$$\underset{t\to\infty}{Limt}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx=\frac{1}{p-1} \quad \text{عندما } P>1$$

والتكامل متقارب في هذه الحالة.

2) عندما $P<1$ فإن $P-1<0$ وبالتالي: $\underset{t\to\infty}{Limt}\frac{1}{t^{p-1}}=\infty$ والتكامل المعتل متباعد في هذه الحالة.

نتيجة:

التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ متقارب عندما $P>1$ ومتباعد عندما $P\leq 1$.

مبرهنة Theorem:

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,\infty)$ وتأخذ في IR الموجبة عندئذ التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ يتقارب إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث يكون:

$$\int_a^t f(x)\,dx\leq M \quad \text{وذلك مهما تكن } t\in[a,\infty)$$

اختبار المقارنة : A comparison test

بفرض أن الدالتين f و g معرفتان ومستمرتان على المجال $[a,\infty)$ ولنفرض أن $g(x) \le f(x)$ ، $\forall\ x \in [a,\infty)$ عندئذ :

1- إذا كان التكامل $\int_a^\infty f(x)\ dx$ متقارباً فإن التكامل $\int_a^\infty g(x)\ dx$ متقارب.

2- إذا كان التكامل $\int_a^\infty g(x)\ dx$ متباعداً فإن التكامل $\int_a^\infty g(x)\ dx$ متباعد.

مثال:

بين أن التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx$ متقارب.

الحل:

حسب خواص التكامل نستطيع أن نكتب:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \int_0^1 e^{-x^2}\ dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\ dx$$

إن التكامل الأول هو تكامل محدود قيمته منتهية، أما بالنسبة للتكامل الثاني $\int_1^\infty e^{-x^2}\ dx$

فإنه $x \in [1,\infty)$ فإن $x < x^2$ وبالتالي: $e^{-x^2} < e^{-x}$ ولدينا:

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\ dx = \underset{x\to\infty}{Limt} \int_1^x e^{-x}\ dx$$

$$= \underset{x\to\infty}{Limt}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^x = \underset{x\to\infty}{Limt}\left(e^{-1} - e^{-x}\right) = e^{-1}$$

حسب نظرية المقاربة.

مبرهنة Theorem:

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,\infty)$ وتأخذ في IR الموجبة عندئذ التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\ dx$ يتقارب إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\ \ \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists \in [a,\infty), c \le u < v < \infty \Rightarrow \left|\int_u^v f(x)\ dx\right| < \varepsilon$$

أمثلة محلولة

1- باستخدام اختبار المقارنة بين أي من التكاملات المعتلة التالية متقاربة:

$$1.\ \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \qquad 2.\ \int_1^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx \qquad 3.\ \int_1^\infty \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$$

الحل:

1. نعلم أن $\sin x \le 1$ وبالتالي يكون $\sin^2 x \le 1$ ومنها $\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ وقد وجدنا أن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب وبالتالي فإن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ متقارب حسب اختبار المقارنة.
2. نعلم أن $x \le e^x$ لكل $x \in [1,\infty)$ وبالتالي يكون : $x^2 < (e^x)^2 = e^{2x}$ وبما أن $x \ge 1$ فإن $x^2 < e^{x^2} + x$ وبالتالي يكون $\frac{1}{x+e^{2x}} < \frac{1}{x^2}$ حيث $x \ge 1$ وبما أن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب وبالتالي فإن التكامل المعتل وبالتالي فإن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx$ متقارب حسب اختبار المقارنة.
3. يمكن بسهولة إثبات أن $\frac{1+\sqrt{x}}{x} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ عندما $x \in [1,\infty)$ ونعلم من مثال سابق أن التكامل عندما $x \in [1,\infty)$ ونعلم من مثال سابق أن التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\,dx$ متباعد من أجل $P \le 1$ وبتطبيق اختبار المقارنة نجد أن $\int_1^\infty \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$ متباعد.

2- أوجد قيم P التي تجعل التكامل المعتل التالي متقارباً: $\int_1^\infty \frac{1}{x(Lnx)^P}\,dx$.

الحل:

نميز حالتين :

1. عندما $P = 1$ وبالتالي يكون :

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(Lnx)} dx = \underset{t\to\infty}{Limt} \int_e^{\infty} \frac{1}{x(Lnx)} dx$$

نفرض أن $Ln(x)=u$ فيكون : $\frac{dx}{x}=du$:

عندما $x=e$ فإن $u=1$ و عندما $x=t$ فإن $u=Lnt$ إذا :

$$\underset{t\to\infty}{Limt} \int_e^{t} \frac{du}{u} = \underset{t\to\infty}{Limt}\ Lnu \Big|_1^{Ln(t)} = \underset{t\to\infty}{Limt}\ Ln(Lnt) - 0 = \infty$$

2. عندما $P\neq 1$ وبالتالي يكون :

$$\int_e^{t} \frac{1}{x(Ln(x))^p} dx = \underset{t\to\infty}{Limt} \int_1^{Ln(t)} \frac{du}{u^p} = \frac{1}{-p+1} u^{-p+1}\Big|_1^{Ln(t)}$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left[\left(Ln(t)^{-p+1} - 1\right)\right]$$

ولنحسب هذه النهاية عندما $t\to\infty$:

أ- عندما $P>1$ يكون : $\underset{t\to\infty}{Limt}\int_e^{t} \frac{1}{x(Ln(x))^p} dx = \frac{1}{p-1}$ والتكامل متقارب.

ب- عندما $P<1$ يكون : $\underset{t\to\infty}{Limt}\int_e^{t} \frac{1}{x(Ln(x))^p} dx = \infty$ والتكامل متباعد.

ملاحظة:

يمكن استخدام معيار المقارنة لحل هذا المثال.

3- احسب قيمة التكامل المعتل $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\ dx$ لكل $n=0,1,2,3$.

الحل:

عندما $n=0$ فإن:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1 = 0\times 1 = 0!$$

عندما $n=1$ فإن:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\ dx = -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\ dx = 1 = 0\times 1 = 1!$$

عندما $n=2$ فإن :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\ dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} xe^{-x}\ dx = 0 + 2 = 2!$$

عندما $n = 3$ فإن:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} \quad dx = -x^3 e^{-x}\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty xe^{-x} \quad dx = 0 + 3 \times 2 = 3!$$

نتيجة : $\int_0^\infty x^n e^{-x} \quad dx = n!$

4- بين أن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} x \quad dx$ متباعد وأن $\underset{t\to\infty}{Limt}\int_{-t}^{t} x \quad dx = 0$ ماذا تستنتج؟

الحل:

واضح أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \quad dx = \int_{-\infty}^{0} x \quad dx + \int_{-\infty}^{0} x \quad dx$$

$$= \underset{t\to -\infty}{Limt} \int_{t}^{0} x \quad dx + \underset{t\to \infty}{Limt} \int_{0}^{t} x \quad dx$$

$$= = \underset{t\to -\infty}{Limt} \left(\frac{-t^2}{2}\right) + = \underset{t\to \infty}{Limt} \left(\frac{t^2}{2}\right) = -\infty + \infty$$

والنهاية عدم تعين أي غير موجودة.

لاحظ أن:

x دالة فردية وبالتالي $\int_{-a}^{a} x \quad dx = 0$ مما سبق نجد أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \quad dx = \underset{t\to\infty}{Limt}\int_{-t}^{t} x \quad dx = 0$$

أي أن العلاقة ليس متفقة دائماً.

Summary

Integrals Definitions:

Definite Integral : Suppose $f(x)$ is continuous on $[a,b]$.

Divide $[a,b]$ into n subintervals of width Δx and choose x_i from each interval.Then:

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Limt} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \quad \Delta x$$

Anti –Derivative function: An anti –derivative of $f(x)$ is a function $F(x)$, such that $F'(x) = f(x)$.

Indefinite Integral : $\int f(x)dx = F(x) + C$, where $F(x)$ is an anti – derivative of $f(x)$.

Fundamental Theorem of Calculus:

Part I: If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ and

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) .$$

Part II: If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$, $F(x)$ is an anti – derivative of $f(x)$ Then :

$$\int_a^b f(x) \ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Variants of part I:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt = u'(x) \ f[u(x)]$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{b} f(t)dt = v'(x) \ f[v(x)]$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = u'(x) \ f[u(x)] v'(x) \ f[v(x)]$$

Properties:

1 −	$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x) \ dx$ C is constant
2 −	$\int_a^b f(x) \ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
3 −	$\int_a^a f(x) \ dx = 0$

4 −	$\int_a^a [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5 −	$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$
7 −	$(\int_a^a f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ )\ a \le c \le b$
8 −	$\left\lvert\int_a^a f(x)\ dx\right\rvert \le \int_a^a \lvert f(x)\rvert\ dx$
9 −	$f(x) \ge g(x) \Rightarrow\ ,\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^a f(x)\ dx \ge \int_a^a g(x)\ dx$
If $f(x) \ge 0$ on $a \le x \le b$ Then $\int_a^a f(x)\ dx \ge 0$ If $m \le f(x) \ge M$ on $a \le x \le b$ Then $m(b-a) \le \int_a^a f(x)\ dx \le M(b-a)$ If $f(x) \ge g(x)$ on $a \le x \le b$ Then $\int_a^a f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$	

Common Integrals:

1 −	$\int Kdx = Kx + C$ K, C are constants
2 −	$\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\ ,\ n \ne -1$
3 −	$\int x^{-n}\ dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C\ ,\ n \ne 1$
4 −	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln\ \lvert ax+b\rvert + C$
5 −	$\int x^{\frac{p}{q}}\ dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} x^{\frac{p}{q}+1} + C = \frac{q}{p+q} x^{\frac{q}{p+q}} + C$

Trigonometric Functions:

1 −	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$ u x is functions on
2 −	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
3 −	$\int \tan u\ du = Ln\lvert\sec u\rvert + C$
4 −	$\int \cot u\ du = Ln\lvert\sin u\rvert + C$
5 −	$\int \sec u\ du = Ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$

6 −	$\int \csc u \, du = Ln\left\|\csc u - \cot u\right\| + C$
7 −	$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
8 −	$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
9 −	$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
10 −	$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
11 −	$\int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + Ln\left\|\sec u + \tan u\right\|\right) + C$
12 −	$\int \csc^3 u \, du = \frac{1}{2}\left(-\csc u + Ln\left\|\csc u - \cot u\right\|\right) + C$

Inverse Functions:

Is function on x u

1 −	$\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
2 −	$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
3 −	$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} Ln\left(1+u^2\right) + C$
4 −	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
5 −	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
6 −	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
7 −	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} Ln\left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$
8 −	$\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} Ln\left\|u + \sqrt{a^2 - u^2}\right\| + C$
9 −	$\int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} Ln\left\|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\| + C$
10 −	$\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
11 −	$\int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

Hyperbolic functions:

1 –	$\int \sinh u \; du = \cosh u + C$ حيث u دالة في x
2 –	$\int \cosh u \; du = \sinh u + C$
3 –	$\int \tanh u \; du = Ln(\coth u) + C$
4 –	$\int \sec hu = \tan^{-1}\lvert\sinh u\rvert + C$
5 –	$\int \csc hu = \qquad + C$
6 –	$\int \sec hu \tanh u = -\sec hu + C$
7 –	$\int \csc hu \coth u = -\csc hu + C$
8 –	$\int \sec h^2 u \; du = \tan u + C$
9 –	$\int \csc h^2 u \; du = -\coth u + C$

Standard Integration Techniques:

U- Substitution The substitution $u = g(x)$ will convert

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) \; dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \; du$$

Using $du = g'(x) \; dx$.

Integration by parts : $\int udv = uv - \int v \; du$ and

$$\int_a^b u \; dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \; du \; .$$

Choose u and dv from integral and compute du by differentiating u and compute v using $\int dv = v$.

Products and (some) Quotients of Trig Functions For $\int \sin^n x \cos^m x \; dx$ we have the following:

1. n odd : Strip 1 sine out and convert rest to cosines using $\sin^2 = 1 - \cos^2 x$, Then use the substitution $\cos x = u$.
2. m odd : strip 2 cosine out and convert rest to sines using $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, the use the substitution $\sin x = u$.
3. n and m both odd : use either 1 or 2.
4. n and m both even :use double angle or half angle formulas to reduce the integral into a form that can be integrated.

Formulas:

1 – $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2 – $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

3 – $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

4 – $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

For $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$ we have the following :

1. n odd : Strip 1 tangent and 1 secant out and convert the rest to secants using $\tan^2 = \sec^2 x - 1$, Then use the substitution $u = \sec x$.
2. m even : strip 2 secants out and convert rest to tangents using $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, then use the substitution $u = \tan x$.
3. n and m both even: use either 1 or 2.
4. n even and m odd :Each integral will be dealt with differently.

Trig Substitutions:

If the integral contains the following root use the given substitution and formula to convert into an integral functions.

1 –	$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$\Rightarrow x = \frac{a}{b}\sin\theta$	*and*	$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
2 –	$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$\Rightarrow x = \frac{a}{b}\sec\theta$	*and*	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
3 –	$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$\Rightarrow x = \frac{a}{b}\tan\theta$	*and*	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

Partial Fractions:

To integrate $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ where the degree of $p(x)$ is smaller than the degree of $q(x)$.

Factor denominator as completely as possible and find the partial fraction decomposition of the rational expression.

Integrate the partial fraction decomposition (P.F.D) for each factor in the denominator.

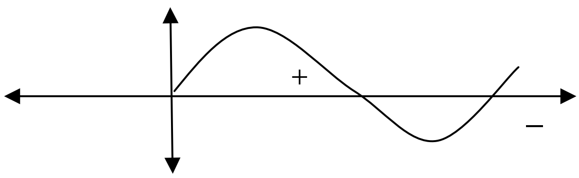
we get term(s) in the decomposition according to the following table:

Term in (P.F.D)	Factor $q(x)$
$\frac{A}{ax+b}$	$ax+b$
$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	ax^2+bx+c

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$	$(ax+b)^k$
$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots\dots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$	$(ax^2+bx+c)^k$

Net Area:

$\int_a^b f(x)\ dx$ represents the net area between $f(x)$ and the x-axis with area above x-axis is positive and area below x-axis is negative.



Area Between curves:

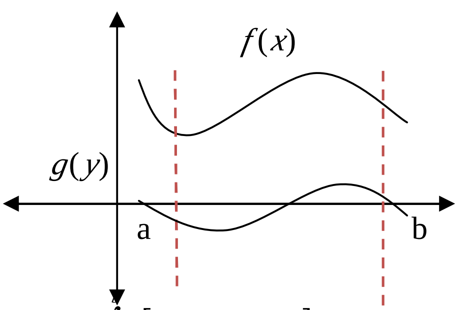
The general formulas for the two main cases for each are ,

$y=f(x)\Rightarrow A=\int_a^b [upperfunction]-[lowerfunction]\ dx$ & $x=f(y)\Rightarrow$

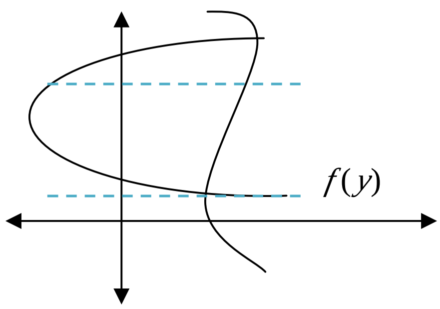
$A=\int_c^d [rightfunct\ \ ion]-[leftfuncti\ \ on]\ dy$

If the curves intersect then the era of each portion must be found individually. Here are

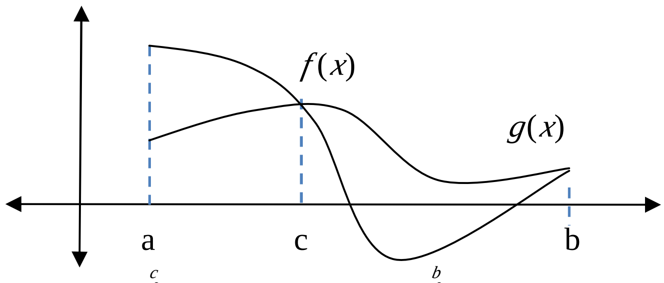
Some sketches of a couple possible situations and formulas for couple of possible cases:



$A=\int_a [f(x)-g(x)]\ dx$



$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\ dy$



$$A=\int_a^c [f(x)-g(x)]\ dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]\ dx$$

Volumes of Revolution:

The two main formulas are:

$$V=\int A(x)\ dx \quad and \qquad V=\int A(y)\ dy$$

Arc length surface Area:

The three basic formulas are:

$$L=\int_a^b ds \quad , \qquad SA=\int_c^b 2\pi y\ ds \qquad (rotate about\ \ ox)$$

$$SA=\int_c^b 2\pi x\ ds \qquad (rotate about\ \ oy)$$

Where ds is dependent upon the form of the function being worked with as follows:

$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad if \quad y=f(x) \quad a\le x\le b$
$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad if \quad x=f(y) \quad a\le y\le b$
$ds=\sqrt{y'^2_t+x'^2_t}\,dx \quad if \quad x=f(t) \quad y=g(t) \quad a\le t\le b$
$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \quad if \quad r=f(\theta) \quad a\le\theta\le b$

Improper Integral :

An integral is an integral with one or two infinite limits.

Infinite Limit :

1. $\int_a^\infty f(x)\ dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\ dx$

2. $\int_{\infty}^{b} f(x)\ dx = \underset{t\to-\infty}{Limt}\int_{t}^{b} f(x)\ dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \underset{t\to-\infty}{Limt}\int_{t}^{a} f(x)\ dx + \underset{t\to\infty}{Limt}\int_{a}^{t} f(x)\ dx$ Provided both integrals are convergen

Comparison Test for Improper Integrals :

Then , On $[a, \infty)$ If $g(x) \le f(x)$

Con v. 1. If $\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx$ con v , Then $\int_{a}^{\infty} g(x)\ dx$

Divg. 2. If $\int_{a}^{\infty} g(x)\ dx$ divg, Then $\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx$

$a > 0$ Then : Useful fact :If

And diverges for $p \le 1$ $p > 0$ Converges if $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^{P}}\ dx$

****

تمارين على الفصل الأول

1-أوجد التكاملات التالية باستخدام التعريف و خصائص التكامل غير المحدود للدوال التالية:☞

$1-\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}dx$ $\quad 2-\int (2\sin x-3\cos x)dx$

$4-\int \frac{dx}{1+4x^2}$ $\quad 5-\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ $\quad 6-\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$7-\int \sqrt{1-2x}dx$ $\quad 8-\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ $\quad 9-\int \frac{dx}{4-5x^2}$

$10-\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$ $\quad 11-\int \frac{xdx}{1+x^4}$ $\quad 12-\int x^5 \ln xdx$

$13-\int x^3e^x dx$ $\quad 14-\int x^2 \sin xdx$ $\quad 15-\int x\sin x\cos xdx$

$16-\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ $\quad 17-\int e^{ax}\cos xdx$ $\quad 18-\int x^2e^x dx$

2- أحسب التكاملات التالية باستخدام طريقة التعويض للدوال التالية:☞

$1-\int \sqrt{1+x^2}\,x^5 \quad dx \quad \left(u=1+x^2\right)$ $\qquad 2-\int \sqrt{2x+1} \quad dx \quad \left(u=1+x^2\right)$

$3-\int x^3\cos\left(x^4+2\right) \quad dx \quad \left(u=x^4+2\right)$ $\qquad 4-\int \cos 5x\sin 5x \quad dx \,\left(u=\cos 5x\right)$

$5-\int x\left(4+x^2\right)^{10} \quad dx \quad \left(u=4+x^2\right)$ $\qquad 6-\int x^2\sqrt{x^3+1} \quad dx \quad \left(u=x^3+1\right)$

$7-\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad dx \quad \left(u=\sqrt{x}\right)$ $\qquad 8-\int \frac{4}{\left(1+2x\right)^3} \quad dx \quad \left(u=1+2x\right)$

3- أحسب التكاملات التالية بطريقة التجزيء للدوال التالية:☞

$1-\int xLnx \quad dx$ $\quad 2-\int x^3e^x \quad dx$ $\quad 3-\int x^2 Lnx \quad dx$

$4-\int x\sin x \quad dx$ $\quad 5-\int x\cos 2x \quad dx$ $\quad 6-\int xLn^2 x \quad dx$

4- أحسب التكاملات التالية بطريقة التجزيء للدوال التالية:☞

$1-\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} \quad dx$ $\qquad 2-\int \frac{x-1}{(x+1)(x-3)^2} \quad dx$

$3-\int \frac{x^2-x+1}{(x-5)(x-3)(x+1)} \quad dx$ $\qquad 4-\int \frac{x-2}{(x-1)\left(x^2-5x+4\right)} \quad dx$

5- أوجد قيمة التكاملات التالية بطريقة التجزيء للدوال التالية:☜

$1-\int \frac{dx}{x^2(1-x)} \quad -1<x<1$

$2-\int \frac{x^5 \; dx}{x^4-5x^2+4} \quad 1<x<5$

$3-\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3} \quad -2<x<3$

$4-\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \quad -1<x<1$

$5-\int \frac{x^4+x+1}{x(x-1)(x-2)}\, dx \quad 0<x<1$

$6-\int \frac{x^4+1}{(x^2-1)^3}\, dx \quad -3<x<6$

6-أوجد قيمة التكاملات التالية للدوال التالية:☜

$1-\int_0^1 e^x \cos x \; dx$

$2-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \; dx$

$3-\int_1^3 \sqrt{x^2+2x-3} \; dx$

$4-\int_0^1 xe^x \; dx$

$5-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \; dx$

$6-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \sin^5 \; dx$

$7-\int_{-1}^3 x^5 \; dx$

$8-\int_2^8 (4x+3) \; dx$

$9-\int_{-1}^3 6 \; dx$

$10-\int_0^4 (1+3x-x^2) \; dx$

$11-\int_{-1}^3 x^{\frac{4}{5}} \; dx$

$12-\int_1^2 \frac{3}{x^4} \; dx$

$13-\int_{-2}^2 \frac{1}{x^5} \; dx$

$14-\int_{-5}^5 \frac{3}{x^3} \; dx$

$15-\int_{\pi}^{2\pi} \cos x \; dx$

$16-\int_0^2 x(2+x^5) \; dx$

$17-\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx$

$18-\int_0^2 \frac{3}{x^4} \; dx$

$19-\int_1^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t \; dt$

$20-\int_0^1 (3+x\sqrt{x}) \; dx$

$21-\int_0^{2\pi} \csc\theta \; d\theta$

$22-\int_0^{\frac{\pi}{6}} \csc\theta \cot\theta \; d\theta$

$23-\int_{-2}^2 (x^6+1) \; dx$

$24-\int_{-1}^1 \frac{\tan x}{1+x^2} \; dx$

7-أوجد قيمة التكاملات التالية للدوال التالية:☜

$$1- \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx: \quad \begin{cases} x \quad , & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$2-\quad \int_0^2 f(x)\ dx: \quad \begin{cases} x^4 & , \quad a \le x \le 1 \\ x^5 & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

8- أوجد المساحة المحصورة فوق المنحني $y=x^2+1$ وتحت المنحنى $y=x$ والمستقيمان $x=0$ و $x=1$ موضحاً الإجابة بالرسم.

9- أوجد المساحة المغلقة المحصورة بين المنحنين $y=x^2$ و $y=2x-x^2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

10- أوجد المساحة التقريبية للقطاع المحصور بين المنحيين $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $y=x^4-x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

11- أوجد المساحة المحصور بين المنحيين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ في المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ موضحاً الإجابة بالرسم.

12- أحسب الحجم الناتج من دوران القطع المكافئ $y=2x^2-x^3$ في المجال $[0,2]$ حول المحور oy.

13- أحسب الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنين $y=x$ و $y=x^2$ حول المحور oy.

14- تحقق من نظرية القيمة الوسطى للدالة $f(x)=1+x^2$ في المجال $[-1,2]$.

15- أعد التمرين السابق على الدوال التالية والمجالات المعطاة:☞

1) $f(x)=x^2\ ,\ [-1,1]$

2) $f(x)=t\sqrt{1+t^2}\ ,\ [0,5]$

3) $f(x)=\cos x\ ,\ \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

4) $f(x)=\sec\theta\tan\theta\ ,\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

5) $f(x)=x-x^2\ ,\ [0,2]$

6) $f(x)=x^2\sqrt{1+x^2}\ ,\ [0,2]$

7) $f(x)=\cos^4 x\sin^3 x,\ [0,\pi]$

8) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\ ,\ [1,6]$

9) $f(x)=x\sqrt{1+x}\ ,\ [0,1]$

16- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات في كل من الحالات التالية:

1- $y=x^2-x-6\ ,\ y=0$ 2- $y=20-x^2\ ,\ y=x^2-12$

3- $y=1-x^2\ ,\ y=1-\sqrt{x}$ 4- $x+y=0\ ,\ x=y^2+3y$

5- $y=\sin\frac{\pi x}{2}\ ,\ y=x^2-2x$ 6- $y\sqrt{x},\quad y=x^2,\quad x=2$

17- أحسب الحجم الناتج من دوران السطح المحصورة بين المنحنيات المعطاة:

1- $y=2\ ,\ y=x^2$ حول المحور ox

2- $x=1+y^2\ ,\ y=x-3$ حول المحور oy

3- $x=0\ ,\ x=9-y^2$ حول المحور $x=-1$

4- $y=x^2+1\ ,\ y=9-x^2$ حول المحور $y=-1$

****

ملخصات عامة على جميع العمليات الرياضية

ملخص العمليات الجبرية Algebra Cheat Sheet

العمليات الحسابية Arithmetic Operations:

1 – $ab+ac=a(b+c)$	2 – $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}=\dfrac{a}{bc}$
3 – $a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\dfrac{ab}{c}$	4 – $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}=\dfrac{ac}{b}$
5 – $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$	6 – $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}$
7 – $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{b-a}{d-c}$	8 – $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$
9 – $\dfrac{ab+ac}{a}=b+c \quad , \quad a\neq 0$	10 – $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)}=\dfrac{ad}{bc}$

خصائص الأسس Exponent Properties:

1 – $a^n a^m = a^{n+m}$	2 – $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=\dfrac{1}{a^{m-n}}$
3 – $(a^n)^m = a^{nm}$	4 – $a^0=1 \quad , \quad a\neq 0$
5 – $(ab)^n = a^n b^n$	6 – $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
7 – $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}=\dfrac{b^{-n}}{a^{-n}}$	8 – $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
9 – $a^{\frac{n}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=(a^n)^{\frac{1}{m}}$	

خصائص الجذورProperties Of Radicals :

$1-\quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$2-\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$
$3-\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$4-\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , \quad b \neq 0$
$5-\quad \sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عدد فردي	$6-\quad \sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$ إذا كان n عدد زوجي

خصائص المتباينات Properties Of Inequalities:

$1-\quad a < b \Rightarrow a+c < b+c$	$2-\quad a < b \Rightarrow a-c < b-c$
$3-\quad a<b \ \ and \ \ c>0 \Rightarrow ac<bc$	$4-\quad a<b \ \ and \ \ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
$5-\quad a<b \ \ and \ \ c<0 \Rightarrow ac>bc$	$6-\quad a<b \ \ and \ \ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

خصائص القيمة المطلقة Properties of Absolute value:

$1-\quad \lvert a\rvert = \begin{cases} a & if \quad a \geq 0 \\ -a & if \quad a<0 \end{cases}$	$2-\quad \lvert a\rvert \geq 0$
$3-\quad \lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	$4-\quad \lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$
$5-\quad \left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert} \quad , \quad \lvert b\rvert \neq 0$	$6-\quad \lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$7-\quad \lvert a\rvert = b \Rightarrow \quad a=b \, or \quad a=-b$	$6-\quad \lvert a\rvert < b \Rightarrow \quad -b<a<b$ $\lvert a\rvert > b \Rightarrow \quad a<-b \, or \, a>b$

صيغة المسافة بين نقطتين: Distance Formula

$1-\quad d(p_1,p_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

صيغة منتصف قطعة مستقيمة :Middle of Line Piece

$1-\quad m\left(\frac{x_2+x_1}{2},\frac{y_2+y_1}{2}\right)$

Factoring Formulas : تحليل الصيغ

1 −	$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
2 −	$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3 −	$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
4 −	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
5 −	$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
6 −	$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$
7 −	$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$
8 −	$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$
9 −	$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$
10 −	إذا كان n فردي فإن: $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$ $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + ... - a^{n-1})$ إشارة كثيرة الحدود متناوبة

:Logarithms Properties خصائص اللوغاريثمات

1 − $y = \log_a x \Rightarrow x = b^y$	2 − $\ln x = \log_e x$
3 − $\log x = \log_{10} x$	4 − $e = 2.718281828$
5 − $\log_b b = 1$	6 − $\log_b 1 = 0$
7 − $\log_b b^x = x$	8 − $b^{\log_b x} = x$
9 − $\log_b x^r = r \log_b x$	10 − $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
11 − $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	12 − $Dom(\log_b x) = \{x > 0\} = \overset{+}{R}$

الأخطاء الشائعة في العمليات الجبرية: Common Algebraic Errors

سنذكر بعض الأخطاء التي يقع فيها الطلاب وذلك لعدم معرفتهم بها والتي تتلخص في الجدول التالي:

1 −	$\frac{2}{0} \neq 0 \quad , \quad \left(\frac{2}{0} = \infty\right)$
2 −	$\frac{0}{2} \neq 2 \quad , \quad \left(\frac{0}{2} = 0\right)$
3 −	$-3^2 \neq 9$
4 −	$\left(x^2\right)^3 \neq x^5$
5 −	$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$
6 −	$\frac{1}{x^2 + x^3} \neq x^{-2} + x^{-3}$
7 −	$\frac{a + bx}{a} \neq 1 + bx$
8−	$-a(x-1) \neq -ax - a, \quad [-a(x-1) = -ax + a]$
9 −	$(x+a)^2 \neq x^2 + a^2$
10 −	$\sqrt{x^2 + a^2} \neq x + a$
11 −	$\sqrt{x+a} \neq \sqrt{a} + \sqrt{x}$
12 −	$(x+a)^n \neq x^n + a^n$
13 −	$\sqrt[n]{x+a} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}$
14 −	$a(x+b)^2 \neq (ax+ab)^2$
15−	$\sqrt{a^2 - x^2} \neq -\sqrt{x^2 - a^2}$
16 −	$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} \neq \frac{ab}{c} \quad , \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \neq \frac{ac}{b}$

التحليل وحل المعادلات: Factoring and Solving

– طريقة المميز والقانون: Quadratic Formula

نعلم بأن معادلة الدرجة الثانية تكون على النحو التالي : $ax^2 + bx + c = 0$

نكون المميز على الشكل التالي : $\Delta = b^2 - 4ac$

ومنها يكون : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

إذا كان $\Delta > 0$ يوجد جدران حقيقيان مختلفان

إذا كان $\Delta = 0$ يوجد جدر حقيقي مكرر واحد.

إذا كان $\Delta < 0$ لا توجد جذور حقيقية .

حالة خاصة في حالة $x^2 = p$ عندئذ $x = \pm\sqrt{p}$ بحيث $p \neq 0$

– طريقة إكمال المربع كامل Completing The square:

لحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ نتبع الخطوات التالية:

1- نقسم المعادلة على a .
2- ننقل الثابت إلى الطرف الثاني.
3- نأخذ نصف أمثال x ونربعها ونضيفها ونطرحها من المعادلة السابقة.
4- العناصر الثلاثة الأولى متطابقة.
5- ننقل العدد إلى الطرف الثاني.
6- إذا كان الطرف الثاني موجب يوجد جذران وإذا كان الطرف الثاني صفر يوجد جذر واحد وإذا كان الطرف الثاني سالب لا توجد جذور.

فمثلاً: إذا كان لدينا معادلة على النحو التالي: $x^2 - 3x - 5 = 0$

الحل:

$x^2 - 3x = 5$ منها وباستخدام الخطوات السابقة يكون لدينا :

$$x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 5 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

الدوال ومنحنياتها :Functions and graphs

- **الدالة الثابتة :Constant Function**

تسمى الدالة التي تأخذ الشكل التالي: $f(x)=a$ أو $y=a$ دالة ثابتة وبيان هذه الدالة هو مستقيم أفقي يمر بالنقطة $(0,a)$.

- **الدالة الخطية (الخط المستقيم) :Linear Function**

تسمى الدالة التي تأخذ الشكل التالي: $y=mx+b$ دالة خطية يسمى m ميل الخط المستقيم وبيان الدالة خط مستقيم يمر بالنقطة $(0,b)$ وله الميل m.

- **الميل : Slope**

يحسب بالشكل التالي: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ومعادلة مستقيم يمر بنقطة (x_1,y_1) وميله m هي $y=y_1+m(x-x_1)$.

- **دالة القطع المكافئ :Parabola Function**

1- التي تأخذ الشكل التالي: $y=a(x-h)^2+k$ وهو بيان مفتوح للأعلى إذا كان $a>0$ ومفتوح للأسفل إذا كان $a<0$ وذروته النقطة (h,k).

2- التي تأخذ الشكل التالي: $y=ax^2+bx+c$ وهو بيان مفتوح للأعلى إذا كان $a>0$ ومفتوح للأسفل إذا كان $a<0$ وذروته النقطة $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.

3- التي تأخذ الشكل التالي: $x=ay^2+by+c$ وهو بيان مفتوح لليمين إذا كان $a>0$ ومفتوح لليسار إذا كان $a<0$ وذروته النقطة $\left(f\left(\dfrac{-b}{2a}\right), \dfrac{-b}{2a}\right)$

الدائرة :Circle

تأخذ الشكل العام التالي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ بيانها دائرة نصف قطرها r ومركزها النقطة (h,k).

- **حالة خاصة عندما** $h=k=0$ تأخذ الشكل العام التالي: $x^2+y^2=r^2$ (مركزها نقطة الأصل)

القطع الناقص :Ellipse

يأخذ الشكل العام التالي: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ بيانه شكل بيضوي له المركز (h,k) وله نصفي قطرين أفقي a وراسي b.

– **حالة خاصة عندما** $h=k=0$ تأخذ الشكل العام التالي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

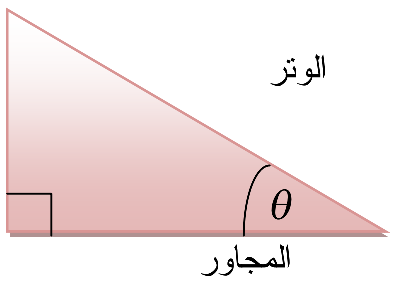
القطع الزائد :Hyperbola

يأخذ الشكل العام التالي: $\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$ بيانه قطع زائدي له فرعان أحدهما مفتوح للأعلى والثاني مفتوح للأسفل وخطين مقاربين ميلاهما $\pm\frac{b}{a}$ ومركزه في نقطة تقاطع المقاربين.

– **حالة خاصة عندما** $h=k=0$ تأخذ المعادلة الشكل العام التالي: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

الدوال المثلثية :Trig Functions

يمكن توضيح العلاقات المثلثية من الشكل التالي:

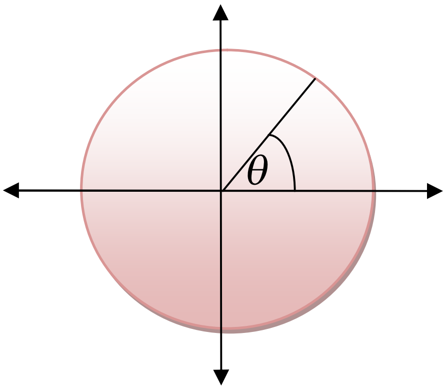


واضح أن الزاوية θ تقع بين $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ومنه نكون الجدول التالي للنسب المثلثية:

$1-\quad \sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$2-\quad \cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
$3-\quad \tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$4-\quad \csc\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$
$5-\quad \sec\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	$6-\quad \cot\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

– العلاقات المثلثية في دائرة الوحدة Unit Circle Trig:

في هذه الحالة سندرس علاقات الدائرة على دائرة الوحدة أي دائرة نصف قطرها واحد ومركزها نقطة الأصل والتي تأخذ الشكل التالي:



الجدول التالي يبين العلاقات الهامة لهذه الدائرة:

$1 - \quad \tan\ \theta = \frac{y}{x}$	$2 - \quad \csc\ \theta = \frac{1}{y}$
$3 - \quad \sec\ \theta = \frac{1}{x}$	$4 - \quad \cot\ \theta = \frac{x}{y}$

دائرة الوحدة Unit Circle

من أجل أي زوج مرتب على دائرة الوحدة (x, y) يكون $y = \sin\theta$, $x = \cos\theta$

فمثلاً : $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

– حقائق وخصائص مثلثية: Facts and Properties

الجدول التالي يبين نطاق ومدى كل الدوال المثلثية :

2 – $\cos\theta$ نطاقها: R ومدها: $-1 \le \cos\theta \le 1$	1 – $\sin\theta$ نطاقها : R ومدها: $-1 \le \sin\theta \le 1$
4 – $\csc\theta$ نطاقها: $\theta \ne (n)\pi \quad , n \in Z$ ومدها : $\csc\theta \le -1 \quad or \quad \csc\theta \ge 1$	3 – $\tan\theta$ نطاقها: $\theta \ne \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad , n \in Z$ ومدها : $-\infty \le \tan\theta \le \infty$
6 – $\cot\theta$ نطاقها : $\theta \ne (n)\pi$ ومدها : $-\infty \le \cot\theta \le \infty$	5 – $\sec\theta$ نطاقها: $\theta \ne \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad , n \in Z$ ومدها: $\sec\theta \le -1 \quad or \quad \sec\theta \ge 1$

– حالة خاصة (أدوار الدوال المثلثية) Period Trig functions

نحدد في الجدول دور كل دالة مثلثية:

2– $\cos\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$	1 – $\sin\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$
4– $\csc\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$	3 – $\tan\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{\pi}{\omega}$
6 – $\cot\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{\pi}{\omega}$	5 – $\sec\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$

– العلاقات بين الدوال المثلثية : Formulas and Identities

1– $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	2 – $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	3 – $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

– صيغ ضعف الزاوية:Double Angle Formulas

2 – $\cos 2\theta = 2\csc^2\theta - 1$	1 – $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
4 – $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$	3 – $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

- صيغ الفردية والزوجية :Even / odd Formulas

1 – $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ فردية	2 – $\cos(-\theta) = \cos\theta$ زوجية
3 – $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ فردية	4 – $\csc(-\theta) = -\csc\theta$ فردي
5 – $\sec(-\theta) = \sec\theta$ زوجية	6 – $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ فردية

- صيغ الدور :Periodic Formulas

1 – $\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta$	2 – $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta$
3 – $\tan(\theta + \pi n) = \tan\theta$	4 – $\csc(\theta + 2\pi n) = \csc\theta$
5 – $\sec(\theta + 2\pi n) = \sec\theta$	6 – $\cot(\theta + \pi n) = \cot\theta$

- صيغ بين نصف قطرية (الراديان) والدرجات:

Digress to Radians Formulas

$$\frac{\pi}{180} = \frac{t}{x} \Rightarrow t = \frac{\pi x}{180}$$

$$x = \frac{180\ t}{\pi}$$

- علاقات نصف (قطرية) الزاوية والمجموع والفرق: Half Angle Formulas

1 – $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$
2 – $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$
3 – $\tan^2(\theta) = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
4 – $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
5 – $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$
6 – $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$

- صيغ تحويل الضرب (الجداء) إلى مجموع: Product to sum formulas

1 – $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

2−	$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$
3−	$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
4−	$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

– صيغ تحويل المجموع إلى الضرب: Sum to Product Formulas

1−	$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
2−	$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
3−	$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
4−	$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

– صيغ الإرجاع إلى الربع الأول: Cofunction Formulas

1− $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$	2− $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$
3− $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$	4− $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$
5− $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta$	6− $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$

الدوال المثلثية العكسية:Inverse Trig functions

سنذكر أهم العلاقات والقوانين للدوال المثلثية العكسية في الجدول التالي:

1 –	$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$
2 –	$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$
3 –	$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$

– نطاق ومدى الدوال المثلثية العكسية: Domain and Range

1 –	$y = \sin^{-1} x$ نطاقها: $-1 \le x \le 1$ ومدها: $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
2 –	$y = \cos^{-1} x$ نطاقها: $-1 \le x \le 1$ ومدها: $0 \le y \le \pi$
3 –	$y = \tan^{-1} x$ نطاقها: $-\infty \le x \le \infty$ ومدها: $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

خصائص الدوال العكسية: Inverse Properties

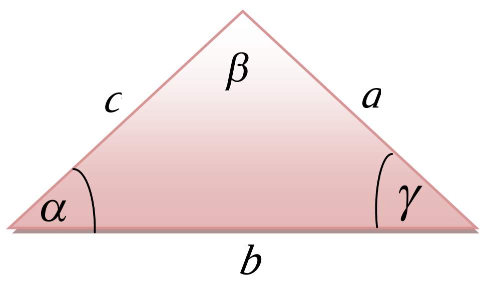
1 –	$\sin(\sin^{-1} x) = x$	2 –	$\sin^{-1}(\sin \theta) = \theta$
3 –	$\cos(\cos^{-1} x) = x$	4 –	$\cos^{-1}(\cos \theta) = \theta$
5 –	$\tan(\tan^{-1} x) = x$	6 –	$\tan^{-1}(\tan \theta) = \theta$

المصطلحات المرادفة:Alternate notation

1 –	$\sin^{-1} x = \arcsin x$
2 –	$\cos^{-1} x = \arccos x$
3 –	$\tan^{-1} x = \arctan x$

العلاقات في المثلث: Low in Trig

يمكن توضيح العلاقات المثلثية من الشكل التالي:



1 − $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$	2 − $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
3 − $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$	4 − $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$
5 − $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$	6 − $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$
7 − $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$	8 − $\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$

النهايات Limits

التعريف الدقيق : Precise Definition

نقول أن $\lim_{x \to a} f(x) = L$ **إذا وجدنا لكل** $\varepsilon > 0$ **عدد** $\delta > 0$ **وكان:**

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftarrow |x - a| < \delta$$

التعريف العملي :Working Definition

نقول أن $\lim_{x \to a} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما نجعل x تقترب من a ودون أن نجعل $x = a$.

النهاية من اليمين : Right hand limit

نقول أن $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما نجعل x تقترب من a بقيم أكبر منها فقط $(x > a)$.

النهاية من اليسار : Left hand limit

نقول أن $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما نجعل x تقترب من a بقيم أصغر منها فقط $(x < a)$.

النهاية عند اللانهاية : Limit at Infinity

نقول أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما تأخذ x قيم كبيرة لدرجة كافية.

وبشكل مشابه عندما $x \to -\infty$ وعندها يجب أن تأخذ x قيم سالبة كبيرة.

النهاية عند اللانهاية : Limit at Infinity

نقول أن $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ إذا أخذت $f(x)$ قيم موجبة كبيرة لدرجة كافية عندما تقترب x من a .

وبشكل مشابه عندما $\underset{x\to a}{Limt}\ f(x)=-\infty$ تكون L قيم سالبة كبيرة لدرجة كافية عندما تقترب x من a .

العلاقة بين النهاية والنهايات من الطرفين

Relationship between the limit and one – sided limit:

نوضح العلاقة بين نهاية الدالة بشكل عام والنهاية من اليسار واليمين:

$$\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)=L \Leftrightarrow \underset{x\to a^{+}}{Lim}\ f(x)=\underset{x\to a^{-}}{Lim}\ f(x)=L$$

وكذلك:

$$\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)\neq \underset{x\to a^{+}}{Lim}\ f(x)\Rightarrow \underset{x\to a}{Lim}\ f(x)$$ غير موجودة

خصائص وقواعد إيجاد النهايات Properties and Rules

إذا كانت كلا النهايتين $\underset{x\to a}{Lim}\,f(x)$ و $\underset{x\to a}{Lim}\,g(x)$ موجودتان وكان Cثابت اختياري فإن:

1. $\underset{x\to a}{Lim}\left[Cf(x)\right]=C\,\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)$

2. $\underset{x\to a}{Lim}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)\pm \underset{x\to a}{Lim}\ g(x)$

3. $\underset{x\to a}{Lim}\left[f(x)\times g(x)\right]=\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)\times \underset{x\to a}{Lim}\ g(x)$

4. $\underset{x\to a}{Lim}\ \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)}{\underset{x\to a}{Lim}\ g(x)}\quad ,\quad \underset{x\to a}{Lim}\ g(x)\neq 0$

5. $\underset{x\to a}{Lim}\left[f(x)\right]^{n}=\left[\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)\right]^{n}$

6. $\underset{x\to a}{Lim}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]=\sqrt[n]{\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)}$

حساب نهايات أساسية عند $\pm\infty$: Basic Limit Evaluations at $\pm\infty$

بعض القوانين العامة لإيجاد نهاية الدالة عندما $\pm\infty$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x} = \infty \quad and \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} Ln(x) = \infty \quad and \quad \lim\limits_{x\to 0^{+}} Ln(x) = -\infty$

3. $r > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b}{x^{r}} = 0$

4. $r > 0 \quad and \quad x^{r} \in R, \forall x \in R \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{b}{x^{r}} = 0$

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{n} = \infty$ حيث n زوجي

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n} = \infty \quad and \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n} = -\infty$ حيث n فردي

7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_{n}x^{n} + ... + a_{1}x + a_{0} = \text{sgn}(a)\infty$ حيث n زوجي

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} a_{n}x^{n} + ... + a_{1}x + a_{0} = \text{sgn}(a)\infty$ حيث n فردي

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} a_{n}x^{n} + ... + a_{1}x + a_{0} = -\text{sgn}(a)\infty$ حيث n فردي

ملاحظة : تعني العبارة $\text{sgn}(a)$ إشارة العدد x.

تقنيات حسابية : Evaluation Techniques

- **الدوال المستمرة :Continuous functions**

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x=a$ عندها $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- **الدوال المستمرة والتركيب : Continuous functions and Composition**

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة b وكانت $\lim_{x\to a} f(x) = b$ عندئذ يكون:

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$$

- **حلل واختصر : Factor and Cancel**

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+6}{2} = 4$$

- **الضرب بالمرافق : Rationalize Numerator / Enumerator**

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} = \lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} \times \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{9-x}{(x^2-81)(3+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})} = \frac{-1}{108}$$

- **توحيد المقامات :combine Rational Expressions**

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{x(x+h)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

– قاعدة لوبيتال : L'Hopital Rule

إذا كانت : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ or $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

عندئذ يكون: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ويمكن لـــ a أن يكون $+\infty$ أو $-\infty$

– كثيرة الحدود عند اللانهاية: Polynomials at infinity

إذا كانت $p(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود وأردنا حساب النهاية $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ عندها نخرج أكبر أس لـــ x في البسط والمقام ونحسب النهاية.

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4}{5x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x}-2}=\frac{-3}{2}$$

– نهايات الدوال المعرفة مقطعياً : Limit Piecewise functions

إذا أردنا حساب النهاية $\lim_{x\to-2}g(x)$ حيث $g(x)=\begin{cases}x^2+5 & if \quad x<-2\\ 1-3x & if \quad x\geq-2\end{cases}$ نحسب النهاية من الطرفين:

$$\lim_{x\to-2^-}g(x)=\lim_{x\to-2^-}\left(x^2+5\right)=9$$
$$\lim_{x\to-2^+}g(x)=\lim_{x\to-2^+}(1-3x)=7$$

وبما أن القيمتين مختلفتان فإن $\lim_{x\to-2^-}g(x)$ غير موجودة. أما لو كان الطرفان متساوين فإن للنهاية القيمة ذاتها.

– بعض الدوال المستمرة : Some Continuous functions

سنورد فيما يلي قائمة ببعض الدوال المستمرة وقيم لـــ x التي تكون مستمرة عندها:

1- كثيرات الحدود مستمرة على R.

2- الدوال الكسرية مستمرة على R ماعدا القيم التي تعدم المقام.

3- $\sqrt[n]{x}$ (n فردي) مستمرة على R.

4- $\sqrt[n]{x}$ (n زوجي) مستمرة على $\overset{+}{R}$ $(x \geq 0)$.

5- e^x مستمرة على R.

6- $Ln(x)$ مستمرة من أجل $(x > 0)$.

7- $\cos x$ و $\sin x$ مستمرة على R.

8- $\tan x$ و $\sec x$ مستمرة على R ما عدا القيم

$\left\{ ......, \; -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ... \right\}$.

9- $\cot x$ و $\csc x$ مستمرة على R ما عدا القيم

$\{......, \; -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ... \}$.

- **نظرية القيمة الوسطية: Intermediate Value Theorem**

بفرض $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ و M عدد اختياري يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ عندئذ يوجد عدد C بحيث يكون $0 < C < b$ ويكون $f(C) = M$.

المشتقات Derivatives

المشتقات تعاريف وملاحظات: Derivatives Definition and notation

- إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة عندها تعرف المشتقة بالعلاقة :

$$f'(x) = \lim_{h \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- إذا كانت $y = f(x)$ فإن جميع المصطلحات التالية تعبر عن المشتقة:

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = Df(x)$$

- إذا كانت $y = f(x)$ فإن جميع المصطلحات التالية تعبر عن قيمة المشتقة عند $x = a$:

$$f'(a) = y' \Big|_a = \frac{df}{dx}\Big|_a = \frac{dy}{dx}\Big|_a = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_a = Df(a)$$

تفسير المشتقة: Interpretation of Derivative

– إذا كانت $y=f(x)$ عندئذ:

1. $m=f'(a)$ هي ميل خط المماس للمنحني $y=f(x)$ عند $x=a$ ومعادلة خط المماس عند النقطة $x=a$ يعطى بالمعادلة : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.
2. $f'(a)$ هي المعدل اللحظي (الآني) لتغير $f(x)$ عند $x=a$.
3. إذا كان $f(x)$ هو موقع هدف في اللحظة x عندها $f'(x)$ هي سرعة الهدف عند النقطة $x=a$.

خصائص أساسية /صيغ/قوانين: Basic properties / Formulas / Rules

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للاشتقاق وكان C و n عددان حقيقيان اختياريان عندها يكون:

أهم الخصائص العامة:

1−	$\frac{d}{dx}(C f(x)) = C f'(x)$	حيث C ثابت
2 −	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	حيث n أي عدد
3 −	$(f(x) \pm g(x))' = f(x)' \pm g(x)'$	
4 −	$\frac{d}{dx}(C) = 0$	حيث C ثابت
5 −	$(f(x) \times g(x))' = f(x)' g(x) + f(x) g(x)'$	قاعدة الضرب(الجداء)
6 −	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)' g(x) - f(x) g(x)'}{g(x)^2}$	(قاعدة الكسر)
7 −	$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) g'(x)$	(قاعدة السلسلة)
8 −	$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = g'(x) e^{g(x)}$	
9 −	$\frac{d}{dx}(Ln \quad g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	حيث $g(x) \neq 0$

المشتقات الشائعة : Common Derivatives

1−كثيرات الحدود :Polynomials

1−	$\frac{d}{dx}(C) = 0$	حيث C ثابت
2 −	$\frac{d}{dx}(x) = 1$	
3−	$\frac{d}{dx}(Cx) = C$	
4 −	$\frac{d}{dx}(Cx^n) = nCx^{n-1}$	

2-الدوال المثلثية :Trig Function

1 −	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2 −	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3 −	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4 −	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
5 −	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
6 −	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

3-الدوال المثلثية العكسية :Inverse Trig Functions

1 −	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2 −	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3 −	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
4 −	$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
5 −	$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
6 −	$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

4-الدوال الآسية و اللوغارثمية :Exponential / Logarithm Functions

1 −	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
2 −	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
3 −	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0 \quad , \frac{d}{dx}(\ln \|x\|) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$
4 −	$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad , \quad x > 0$

5-الدوال القطعية الزائدية Hyperbolic Trig functions:

1 –	$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
2 –	$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
3 –	$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \sec h^2 x$
4 –	$\frac{d}{dx}(\sec hx) = -\sec hx \tanh x$
5 –	$\frac{d}{dx}(\csc hx) = -\csc hx \coth x$
6 –	$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\csc h^2 x$

6-حالات من قاعدة السلسلة Chain Rule Variants:

نطبق قاعدة السلسلة على بعض الدوال:

1 –	$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
2 –	$\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = f'(x)e^{f(x)}$
3 –	$\frac{d}{dx}[Lnf(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$
4 –	$\frac{d}{dx}[\sin f(x)] = f'(x)\cos f(x)$
5 –	$\frac{d}{dx}[\cos f(x)] = -f'(x)\sin f(x)$
6 –	$\frac{d}{dx}[\tan f(x)] = f'(x)\sec^2 f(x)$
7 –	$\frac{d}{dx}[\sec f(x)] = f'(x)\sec f(x)\tan f(x)$
8 –	$\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1} f(x)\right] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$

9 –	$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1} f(x)\right]=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
10 –	$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} f(x)\right]=\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

7- المشتقات من مراتب عليا : Higher Order Derivative

يرمز للمشتقة الثانية بالشكل التالي:

$$f''(x)=y''=\frac{d^2 f}{d^2 x}=\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)\right)=D^2 f(x)$$

وتعرف على الشكل التالي:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

أي أنها مشتقة المشتقة الأولى .

- يرمز للمشتقة النونية (من المرتبة n) بالشكل التالي: $f^n(x)=\frac{d^n f}{d^n x}$

وتعرف على الشكل التالي: $f^n(x)=\left(f^{n-1}(x)\right)'$

أي أنها مشتقة المشتقة من المرتبة $(n-1)$.

8- التفاضل الضمني : Implicit differentiation

نصادف دوال يمتزج فيها المتغير x والدالة $y=f(x)$ معاً في صيغة ضمنية غير سهلة العزل أحداهما عن الآخر وعندها لحساب المشتقة y' نفاضل الدالة الضمنية ونعزل الحدود التي تحوي y' ثم نكتب صيغة y' بدلالة كل من x و y ولتوضيح هذه الفكرة نورد المثال التالي: أوجد y' للدالة الضمنية $e^{2x-9y}+x^3y^2=\sin y+11x$

نشتق الطرفين فنجد: $e^{2x-9y}(2x-9y')+3x^2y^2+2x^3yy'=\cos y\,y'+11$ منها نحصل على:

$$y'=\frac{11-2e^{2x-9y}-3x^2y^2}{2x^3y-9e^{2x-9y}-\cos y}$$

9ـ التزايد والتناقص والتقعر نحو الأعلى والأدنى :

Increasing / Decreasing- Concave Up /Down

- **النقاط الحرجة : Critical points**

نقول عن النقطة $x = c$ أنها نقطة حرجة للدالة $f(x)$ إذا تحقق أحد الشرطين:

1. $f^{'}(c) = 0$
2. $f^{'}(c)$ غير موجودة.

- **التزايد والتناقص Increasing / Decreasing**

1. إذا كان $f^{'}(x) > 0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة تزايده في المجال I.
2. إذا كان $f^{'}(x) < 0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة متناقصة في المجال I.
3. إذا كان $f^{'}(x) = 0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة ثابتة في المجال I .

- **التقعر للأعلى والتقعر للأدنى Concave Up / Concave Down**

1. إذا كان $f^{''}(x) > 0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة تتقعر نحو الأعلى في المجال I.
2. إذا كان $f^{''}(x) < 0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة تتقعر نحو الأدنى في المجال I.

- **نقاط الانقلاب (الانعطاف) Increasing points**

نقول عن النقطة $x = c$ أنها نقطة انعطاف للدالة $f(x)$ إذا تغير التقعر عند النقطة $x = c$ و $f''(x) = 0$.

10ـ **النهايات الحدية** : Extreme

– **النهاية المطلقة:Absolute Extreme**

1. نقول عن $x=c$ أنها نقطة نهاية كبرى مطلقة للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c)\geq f(x)$ لجميع قيم x في نطاق الدالة.
2. نقول عن $x=c$ أنها نقطة نهاية صغرى مطلقة للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c)\leq f(x)$ لجميع قيم x في نطاق الدالة.

– **نظرية فيرمات :Fermat's Theorem**

إذا كان للدالة $f(x)$ نهاية حدية عند $x=c$ عندئذ تكون النقطة $x=c$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$.

– **نظرية القيمة الحدية :Extreme Theorem**

إذا كان للدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ عندئذ يوجد عددان c و d بحيث يكون:

1. $a\leq c\leq b$ و $a\leq d\leq b$.
2. $f(c)$ هي نهاية كبرى مطلقة في المجال المغلق $[a,b]$.
3. $f(d)$ هي نهاية صغرى مطلقة في المجال المغلق $[a,b]$.

11ـ **إيجاد النهاية المطلقة**: Finding Absolute Extreme

لإيجاد النهاية المطلقة لدالة مستمرة $f(x)$ على الفترة المغلق $[a,b]$ نستخدم الخطوات التالية:

1. نجد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$.
2. نحسب قيم $f(x)$ عند كل منها.
3. نحسب كلاً من $f(a)$ و $f(b)$.
4. لتحديد القيمة المطلقة العظمى نأخذ أكبر قيمة من القيم السابقة ولتحديد القيم المطلقة الصغرى نأخذ أصغر قيمة بين القيم السابقة.

12ـ النهايات الحدية المكانية (النسبية): Relative (local) Extreme

1. نقول عن $x=c$ أنها قيمة عظمى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c)\geq f(x)$ لجميع قيم x قرب c.
2. نقول عن $x=c$ أنها قيمة صغرى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c)\leq f(x)$ لجميع قيم x قرب c.

13ـ اختبار المشتقة الأولى : First Derivative

إذا كانت $x=c$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ عندئذ $x=c$ ستكون:

1. نهاية عظمى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(x)>0$ على يسار النقطة $x=c$ و $f'(x)<0$ على يمين النقطة $x=c$.
2. نهاية صغرى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(x)<0$ على يسار النقطة $x=c$ و $f'(x)>0$ على يمين النقطة $x=c$.
3. لن تكون نهاية حدية نسبية للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(x)$ له الإشارة ذاتها على طرفي النقطة $x=c$.

14ـ اختبار المشتقة الثانية : Second Derivative Test

إذا كانت $x=c$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ وكان $f'(c)=0$ عندئذ $x=c$ ستكون:

1. نهاية عظمى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f''(x)<0$.
2. نهاية صغرى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f''(x)>0$.
3. ربما تكون نهاية عظمى مكانية أو نهاية صغرى مكانية أولا تكون إذا كان $f''(x)=0$.

15ـ إيجاد النهايات المكانية و تصنيف النقاط الحرجة :

Finding Relative Extreme and classify critical points

1. نوجد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x)$.
2. نستخدم اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية لكل نقطة حرجة .

- نظرية القيمة الوسطى :Mean Value Theorem

إذا كان للدالة $f(x)$ دالة مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح (a,b)عندئذ يوجد عدد $a<c<b$ بحيث يكون:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

التكاملات Integrals

التكامل المحدود: Definite Integral

لنفرض أن $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ ولنقسم المجال $[a,b]$ إلى n مجالاً جزئياً بعرض Δx ولنخذ x_i^* من كل مجال منها عندئذ:

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Limt} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

الدالة الأصلية: Anti- Derivative

الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ هي دالة $F(x)$ بحيث $F'(x) = f(x)$.

التكامل اللامحدود : Indefinite Integral

ويكون على الشكل التالي:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ و C ثابت .

النظريات الأساسية لحساب التكامل :

Fundamental Theorems for calculate Integrals

1. إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ عندها تكون الدالة $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ هي أيضاً مستمرة على الفترة $[a,b]$ ويكون:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \ .$$

2. إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ عندئذ :

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص أساسية /صيغ/قوانين: Basic properties / Formulas / Rules

أهم الخصائص العامة:

1 –	$\int Cf(x)dx = C\int f(x)\ dx$ حيث C ثابت
2 –	$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية
3 –	$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)\ dx$
4 –	$\int_a^b f(x)\ dx = 0$
5 –	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
6 –	$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$
7 –	$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \quad (a \le c \le b)$
8 –	$\left\|\int_a^b f(x)\ dx\right\| \le \int_a^b \|f(x)\|\ dx$
9 –	$f(x) \ge g(x) \Rightarrow \quad , \quad x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$
10 –	$\int_a^b Cf(x)\ dx = C(b-a)$ – إذا كان $f(x) \ge 0$ في المجال $a \le x \le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge 0$ – إذا كان $f(x) \ge g(x)$ في المجال $a \le x \le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$

Common Integrals : التكاملات الشائعة

1-كثيرات الحدود :Polynomials

1 −	$\int dx = x + C$ حيث C ثابت
2 −	$\int Kdx = Kx + C$ حيث K, C ثوابت
3 −	$\int x^{n} \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$
4 −	$\int x^{-n} \, dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C \quad , \quad n \neq 1$
5 −	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln \lvert ax+b \rvert + C$
6 −	$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} x^{\frac{p}{q}+1} + C = \frac{q}{p+q} x^{\frac{q}{p+q}} + C$

2-الدوال المثلثية :Trig Functions

1 −	$\int \sin u \, du = -\cos u + C$ حيث u دالة في x
2 −	$\int \cos u \, du = \sin u + C$ حيث K, C ثوابت
3 −	$\int \tan u \, du = Ln \lvert \sec u \rvert + C$
4 −	$\int \cot u \, du = Ln \lvert \sin u \rvert + C$
5 −	$\int \sec u \, du = Ln \lvert \sec u + \tan u \rvert + C$
6 −	$\int \csc u \, du = Ln \lvert \csc u - \cot u \rvert + C$
7 −	$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
8 −	$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
9 −	$\int \sec^{2} u \, du = \tan u + C$
10 −	$\int \csc^{2} u \, du = -\cot u + C$

11 −	$\int \sec^3 u \; du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + Ln\left\|\sec u + \tan u\right\|\right) + C$
12 −	$\int \csc^3 u \; du = \frac{1}{2}\left(-\csc u + Ln\left\|\csc u - \cot u\right\|\right) + C$

Exponential / Logarithm Functions: 3−الدوال الآسية و اللوغارثمية

1 −	$\int e^u \; du = e^u + C$ حيث u دالة في x
2 −	$\int a^u \; du = \frac{a^u}{Lna} + C$
3 −	$\int Lnu \; du = u\left\|Lnu - u\right\| + C$
4 −	$\int ue^u \; du = (u-1)\; e^u + C$
5 −	$\int \frac{du}{u \ln(u)} = Ln\left\|Ln(u)\right\| + C$
6 −	$\int e^{au}\sin(bu)\; du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a\sin bu - b\cos bu\right) + C$
7 −	$\int e^{au}\cos(bu)\; du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a\cos bu + b\sin bu\right) + C$

Inverse Trig Functions: 4−الدوال المثلثية العكسية

1 −	$\int \sin^{-1} u \; du = u\sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$ حيث u دالة في x
2 −	$\int \cos^{-1} u \; du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
3 −	$\int \tan^{-1} u \; du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2} Ln\left(1+u^2\right) + C$
4 −	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
5 −	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
6 −	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
7 −	$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} Ln\left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$
8 −	$\int \sqrt{a^2-u^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} Ln\left\|u + \sqrt{a^2-u^2}\right\| + C$

9 –	$\int \sqrt{u^2 - a^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} Ln \left\| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right\| + C$
10 –	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
11 –	$\int \sqrt{2au - u^2}\; du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

5–الدوال المثلثية الزائدية: Hyperbolic Trig functions

1 –	$\int \sinh u \; du = \cosh u + C$ حيث u دالة في x
2 –	$\int \cosh u \; du = \sinh u + C$
3 –	$\int \tanh u \; du = Ln(\coth u) + C$
4 –	$\int \sec hu = \tan^{-1}\left\|\sinh u\right\| + C$
5 –	$\int \csc hu = \qquad + C$
6 –	$\int \sec hu \tanh u = -\sec hu + C$
7 –	$\int \csc hu \coth u = -\csc hu + C$
8 –	$\int \sec h^2 u \; du = \tan u + C$
9 –	$\int \csc h^2 u \; du = -\coth u + C$

تقنيات تكاملية قياسية (الكسرية): Standard Integration Techniques

1- التكامل بالتعويض (تغير المتحول) : Substitution

إذا أعطينا التكامل $\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx$ عندها نجزئ تغير متحول $u=g(x)$

وسوف نحصل على التكامل: $\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$

2- التكامل بالتجزيء: Integration by parts

إذا أعطينا التكامل

$$\int udv = uv - \int v\ du$$

عندها نكون التكامل التالي:

$$\int_a^b u\ dv = uv\ \Big|_a^b - \int_a^b v\ du$$

حيث نختار u و dv ثم نكامل du و نفاضل v.

3-التكامل بالتعويض في الدوال المثلثية:

Substitution integration by Trig function

إذا كان التكامل يحوي جذور مثلثية استخدم التكامل بالتعويض وفق الصيغ التالية:

$1-\quad \sqrt{a^2-b^2x^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{b}\sin\theta \quad and \quad \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$
$2-\quad \sqrt{b^2x^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{b}\sec\theta \quad and \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$3-\quad \sqrt{a^2+b^2x^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{b}\tan\theta \quad and \quad \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

4- تكامل الدوال الكسرية :Partial functions

إذا كان لدينا التكامل $\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$ وكانت درجة كثيرة الحدود $p(x)$ أقل من درجة كثيرة الحدود $q(x)$ عندها نلجأ إلى طريقة تفريق الكسور وفق الجدول التالي:

صيغة الكسر بالتفريق	عامل في $q(x)$
$\frac{A}{ax+b}$	$ax+b$
$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	ax^2+bx+c
$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$	$(ax+b)^k$
$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$	$(ax^2+bx+c)^k$

تكامل جداء بعض الدوال المثلثية : Products of Trig Functions

أولاً: إذا كان لدينا التكامل: $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$

نميز الحالات التالية:

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من sin ونحول الباقي إلى cos من خلال العلاقة $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ وبعدها نفرض $\cos x = u$.

2- إذا كان m فردياً: نترك واحد من cos ونحول الباقي إلى sin من خلال العلاقة $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ وبعدها نفرض $\sin x = u$.

3- إذا كان n و m فردياً بأن واحد نتبع البند 1 أو 2 .

4- إذا كان n و m زوجياً بأن واحد نستخدم صيغة ضعف الزاوية لتحويل التكامل لشكل يمكن مكاملته .

ثانياً: إذا كان لدينا التكامل: $\int \tan^n x \sec^m x\, dx$

نميز الحالات التالية:

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من $\tan$ و واحد من $\sec$ ونحول الباقي إلى $\sec$ من باستخدام العلاقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ وبعدها نفرض $u = \sec x$.

2- إذا كان m زوجياً: نترك اثنان من $\sec^2 x \sec x$ ونحول الباقي إلى $\tan x$ من خلال العلاقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التحويل $u = \tan x$.

3- إذا كان n فردياً و m زوجيًا نتبع البند 1 أو 2 .

4- إذا كان n زوجياً و m فردياً لا توجد قاعدة وكل تكامل يكامل بأسلوب مختلف .

****

المراجــع

1. التفاضل والتكامل "الجزء الأول الطبعة الثالثة"، د. رمضان محمد جهيمة، د.أحمد عبد العالي هب الريح، دار الكتاب الجديدة المتحدة .
2. أسس علم الرياضيات التفاضل والتكامل، د. عبد الشافي عبادة، د. حسن مصطفى العويض، د. طلعت عبد الناصر، كلية العلوم (جامعة الملك عبد العزيز – جدة الطبعة الأولى (1421 هـ – 2001م) دار الفكر العربي .
3. 3000 مسألة محلولة في حساب التفاضل والتكامل، سلسلة شوم، ترجمة فايز فوق العادة.
4. إلكترونيات وكهرباء، رياضيات تخصصية 2، المملكة العربية السعودية، المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني، الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج.
5. الحسبان ومبادئ التفاضل، د.احمد محمد عبد المتعال منشورات جامعة السابع من أكتوبر بمصراتة.
6. الرياضيات (1)، د. عمران قوبا، الجامعة الافتراضية السورية.
7. الرياضيات (2)، أ.موفق ألحمصي وآخرون، جامعة دمشق.
8. حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية (الجزء الأول) توماس منشورات جامعة الفاتح.
9. حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية تأليف وليم. هـ. دورفي، كلية مونت هوليوك ترجمة د. محمد علي محمد السمري – دار كاكجروهيل للنشر – جمهورية مصر – القاهرة.
10. Brief Calculus , Michael Sullivan , Chicago State university.
11. Calculus I ,Paul Dawkins , USA , Lamar university.
12. Calculus , Gilbert strange ,Massachusetts Institute of Technology.

توضع هذه الصفحة في خلفية الكتاب

نقدم في هذا الكتاب دراسة مفصلة لعدة مواضيع تهم طالب المعاهد العليا والدراسات الجامعية في أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما وتشمل تعريف المجموعات وخط الأعداد والمتباينات بجميع حالاتها موضحا على خط الأعداد والعلاقات والدوال بشكل تفصيلي موضحا أغلب أشكال هذه الدوال ودراسة نهاية واتصال الدالة في متغير واحد وكذلك توضيح كيفية معرفة استمرارها كما أوردنا اشتقاق الدوال بجميع صيغها مستخدمين جميع القوانين للاشتقاق ثم وضحنا كيفية الاستفادة من المشتقة على شكل تطبيقات عليها وكذلك قدمنا دراسة شاملة لتكامل جميع أنواع الدوال وتطبيقات التكامل عليها وأخيرا أضفنا ملخص عام على جميع العمليات الرياضية.

تجد في هذا الكتاب:

- مئات الأمثلة المحلولة التي تساعد الطالب في فهم جميع المواضيع سابقة الذكر.
- أسلوب متدرج ينمي قدرة الطالب ويبني ثقته بنفسه ويوضح كيفية التعامل مع المسائل الرياضية وإيجاد الحلول لها.
- يشمل الكتاب العديد من الأشكال وبيانات الدوال التي لا يستطيع الطالب تصور أشكالها.

وفي نهاية كل فصل أوردنا (عددا كبيرا من الأمثلة المحلولة) وكذلك ملخص باللغة الإنجليزية.